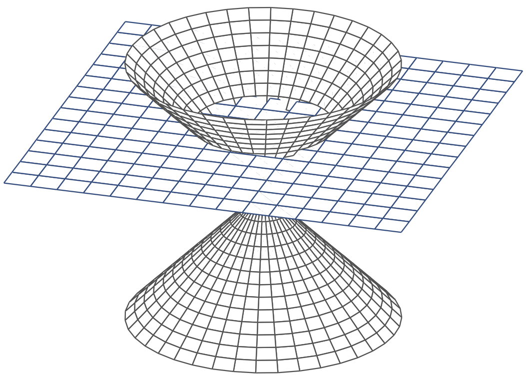
MATEMATIKA PRO GEOCOMPUTATION

MIROSLAV RYPKA A PAVEL TUČEK



KATEDRA GEOINFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Oponenti:
Doc. Mgr. Jiří Dvorský, Ph.D.
Mgr. Emil Kudrnovský, Ph.D.

Tato publikace neprošla redakční jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-244-3468-1

Autoři učebního textu děkují podpoře Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost – Evropského sociálního fondu (projekt číslo CZ.1.07/2.2.00/15.0276 „Geocomputation — Zvýšení konkurenceschopnosti studentů geoinformatiky inovací studia výpočetně náročnými metodami statistického modelování, chaosu, fuzzy a fraktálů” Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky).

evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Úvod

Milí čtenáři,

Alespoň autoři obvykle nepřeskakují úvod, ke konci své práce se do něj pouští a naznačí, co má čtenář od díla čekat. V dalších kapitolách se snažíme nabídnout látku spolu s příklady, které by po přečtení, pochopení a vyřešení měly stačit nejen k získání zápočtu z předmětů Matematika pro Geocomputation a Matematický proseminář, ale také k překonání jiných matematických předmětů.

Většinou se první probírají množiny, které se ale špatně popisují bez znalosti proměnných a výroků. Obejít se bez proměnných a množin u výroků nebo množin u proměnných také nejde. Začínáme tedy raději čísly. Po proměnných, výrocích a množinách přejdeme k výrazům, abychom dále mohli pracovat s funkcemi a posloupnostmi. Po nich následuje látka potřebná pro vyšetřování průběhu funkce. Přidali jsme i samostatnou kapitolu věnovanou kuželosečkám. Příklady z ní dobře poslouží k procvičení kvadratických polynomů a rovnic se dvěma neznámými.

Z textu by mělo být patrné, že jednotlivé kapitoly mezi sebou spíše více než méně souvisejí. Rozklad polynomů na kořenové činitele provádíme podobně jako prvočíselný rozklad. Operace s množinami se definují pomocí skládání výroků. Množiny jsou navíc často definovány pomocí rovnic a nerovnic. Poznatky z téměř všech kapitol nakonec použijeme při vyšetřování průběhu funkce.

Výklad každé kapitoly postupuje **od jednoduššího ke složitějšímu,** naopak příklady složitější rozkládáme na několik jednodušších úloh. Matematikové se totiž vždy snaží přizpůsobit postup řešení snadných problémů na problémy komplikovanější. Nejlépe to uvidíme na vztahu mezi elementárními funkcemi a funkcemi složitějšími. Stačí například znát grafy jednoduchých funkcí a grafy mnoha dalších dostaneme jen jejich posunováním a převracením. Limity nebo derivace košatějších funkcí zpravidla převádíme na výpočty s limitami nebo derivacemi elementárních funkcí. Navíc třeba i při řešení soustavy rovnic s více neznámými dostáváme postupně několik rovnic s jednou neznámou.

Velmi dobrými podklady pro napsání byly knihy Matematická analýza pro I. semestr od Jitky Kojecké, Středoškolská matematika v úlohách I a Přehled středoškolské matematiky od Josefa Poláka. Látka první knihy je zjednodušená, třetí práce obsahuje navíc pravděpodobnost, statistiku a geometrii. Nejen kuželosečky jsou přehledně zpracovány například v učebnici Odmaturuj z matematiky 1 od Pavla Čermáka a Petry

Červinkové. Do seznamu literatury jsou přidány i sbírky příkladů vhodné k dalšímu procvičení probírané látky.

Text, který se Vám dostává do rukou, slouží k výuce Matematiky pro Geocomputation a Matematického prosemináře. Rozhodně není skriptem Matematické analýzy, spíše příručkou jak přistupovat k jednodušším matematickým úlohám a zápisům. Doufáme, že bude pro většinu čtenářů banální, ale nebudeme se zlobit, ani když ostatním aspoň trochu pomůže, aby se dostali na úroveň potřebnou k dalšímu studiu matematiky.

Sluší se také poděkovat recenzentům, bez nichž by skriptum vypadalo úplně jinak. Na úplném konci úvodu většinou autoři vyzvou čtenáře, aby je i oni zahrnuli připomínkami a náměty ke zdokonalení textu, a popřejí jim hodně zábavy a úspěchů při studiu.

Miroslav Rypka a Pavel Tuček

1 | Čísla

Praví matematici sice přenechávají čísla účetním a sami se raději věnují obecnějším množinám a jejich strukturám, ale občas i oni potřebují rozlišit stránky, očíslovat definice nebo určit počet prvků v souboru.

Ve zmíněných případech používáme *přirozená čísla,* označíme je $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Pro *celá čísla* používáme $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Přirozená čísla jsou uzavřená vzhledem k součtu a součinu, což znamená, že součet nebo součin libovolných přirozených čísel je přirozené číslo. Celá čísla jsou navíc uzavřená vzhledem k odčítání. Když chceme bezpečně dělit,[1] tak je vhodné množinu celých čísel doplnit o všechny podíly $\frac{z}{p}$, kde z je libovolné celé a p libovolné přirozené číslo. Získáme takto množinu *racionálních čísel* $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{p}, z \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Matematici-filozofové antického Řecka považovali jen přirozená čísla za krásná a nakonec byli nuceni vzít na milost i racionální čísla. Stejně jako někteří lidé dnes, nebyli ochotni uznat iracionální čísla, potřebná například k výpočtům délek úhlopříček nebo obvodů a obsahů kruhu. Kdyby se však iracionální čísla (π, e, $\sqrt{3} - 26$) měla třeba ve skriptech vyskytovat ve skutečném poměru, na racionální čísla by se v textu vůbec nedostalo.

Poznámka 1.1. Na svědomí to má spočetnost racionálních a nespočetnost iracionálních čísel, jak se dozvíme ve třetí kapitole.

Množinu racionálních a iracionálních čísel dohromady označíme $\mathbb{R}$ a čísla v ní obsažená nazveme *reálná čísla.* Operace ($+, \cdot, :, \sqrt[5]{}$), které budeme provádět, pak budou pro nás mít smysl, pouze když jako výsledek dostaneme reálné číslo. Nebude pro nás mít smysl a zároveň ani výsledek například $\sqrt{-1}$.

Poznámka 1.2. Někdy se zařazuje i nula do přirozených čísel. Musíme také dávat pozor na označení různých podmnožin $\mathbb{R}$ jako $\mathbb{R}^+$, liší se autor od autora.

[1] Toto bezpečí je ale vždy narušeno dělením nulou.

1.1 Přirozená čísla

Už víme, že přirozená čísla nejsou uzavřená vzhledem k dělení. Pokud ale je přirozené číslo dělitelné jiným přirozeným číslem než sebou samým a jedničkou, nazveme jej *složeným číslem.* Zbylá čísla se nazývají *prvočísla,* označíme si je pro svoji potřebu $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}.$$

I když není složené, číslo 1 se mezi prvočísla neřadí.

Číslo a dělí číslo b, právě když se dá číslo b napsat jako součin přirozených čísel a a k. Matematicky:

$$a|b \Leftrightarrow b = a \cdot k, \text{ pro } a, b, k \in \mathbb{N}.$$

S čísly:

$$13|78,\ 78 = 13 \cdot 6,\ 13, 78, 6 \in \mathbb{N}.$$

Každé přirozené číslo (kromě 1) se dá zapsat jako součin prvočísel,

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Tato užitečná vlastnost pomáhá při hledání nejmenších společných násobků nebo při zjednodušování zlomků.

Složené číslo převedeme na součin prvočíselným rozkladem. Takový rozklad existuje vždy jen jediný, pokud jej zapisujeme od nejmenších prvočísel. Při jeho hledání postupujeme od nejmenšího prvočísla (2) a zkoušíme, jestli dělí zkoumané číslo. Pokud ano, dělení provedeme, pokud ne, přejdeme k dalšímu prvočíslu. Když provedeme dělení, zkoušíme dělit získané číslo znovu prvočíslem, kterým jsme dělili, a pak prvočísly většími. Pokud nenajdeme pro číslo prvočíselného dělitele menšího, než je odmocnina z tohoto čísla, číslo už bude prvočíslem. Pro učení tohoto postupu se používají tabulky.

68	2	135	3	460		97		1001	
34	2	45	3						
17	17	15	3						
1		5	5						
		1							

Cvičení 1.1. Doplňte prázdné tabulky.

Řešení. 97 je prvočíslo narozdíl od $460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 23$ a $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Cvičení 1.2.

1. Je pravda, že $13|585$, $9|937$?
2. Která přirozená čísla a dělí číslo 64 $(a|64)$, která z nich jsou prvočísla?

3. Která přirozená čísla b dělí číslo 134 $(b|134)$, která z nich jsou prvočísla?

4. Když známe pro přirozené číslo rozklad na prvočísla, pak snadno najdeme všechna přirozená čísla, která jej dělí. Stačí vzít všechny různé součiny, které se dají získat z prvočísel rozkladu. Zkuste to využít v předchozích dvou příkladech.

5. Nejjednodušší způsob jak systematicky hledat prvočísla je Eratosthenovo síto. Postupuje se od nejmenších přirozených čísel (2,3,4,...) k větším a určuje se, jestli jsou prvočísly tak, že se zkouší jejich dělitelnost menšími (už nalezenými) prvočísly. Stačí zkoušet jen prvočísla menší než odmocnina ze zkoumaného čísla. Pro součin potřebujeme dvě čísla, a nám stačí to menší z nich. Kolik prvočísel je menších než 100?

✓ *Řešení.* ano, $13 \cdot 45 = 585$, ne✓1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, pouze 2 je prvočíslo✓1, 2, 67, 134, prvočísla jsou 2, 67✓takových prvočísel je 25

Matematikové v antickém Řecku věděli, že prvočísel je nekonečně mnoho, a měli pro to elegantní důkaz. Kdyby bylo prvočísel konečně mnoho, mohli bychom to největší označit třeba p_{max}. Uvažujme součin všech prvočísel zvětšený o 1, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdots p_{max} + 1$. Pro jakékoliv číslo nastane jedna z možností, buď je prvočíslo, nebo je složené. Naše číslo je větší než jakékoliv z prvočísel. Není tedy prvočíslo. Jako složené číslo by mělo být dělitelné některým z prvočísel. Ale protože číslo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdots p_{max}$ je dělitelné každým z prvočísel, při dělení čísla $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdots p_{max} + 1$ kterýmkoliv prvočíslem dostáváme zbytek 1. Proto není dělitelné žádným z prvočísel a nemůže být složené. Z předpokladu konečného počtu prvočísel dostáváme nesmysl (spor).

Rozklad na prvočísla používáme k nalezení největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Největší společný dělitel je největší přirozené číslo, které dělí daná čísla. Nejmenší společný násobek je nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné všemi danými čísly. Pro dvě daná přirozená čísla a, b označíme $D(a, b)$ a $n(a, b)$. Například $D(45, 30) = 15$, protože $15|45$, $15|30$ a větší číslo nedělí zároveň čísla 45 a 30. $n(45, 30) = 90$, protože $45|90$, $30|90$ a žádné menší číslo s touto vlastností nenajdeme. Přirozená čísla a a b, pro která $D(a, b) = 1$ nazveme *nesoudělná*, zbylé dvojice čísel jsou *soudělné*.

Při hledání nejmenších společných násobků a největších společných dělitelů využijeme jedinečnosti prvočíselného rozkladu. Pokud prvočíslo nebo jeho mocnina dělí obě čísla, dělí i jejich největšího společného dělitele. V případě nejmenšího společného násobku každé prvočíslo, případně jeho mocnina, obsažené v rozkladu čísel musí dělit jejich nejmenší společný násobek. A tak prvočíselný rozklad největšího společného dělitele obsahuje všechna prvočísla nebo jejich mocniny, která jsou zároveň v rozkladech obou čísel. Nejmenší společný násobek je zase součinem všech prvočísel s nejvyššími mocninami, která nalezneme v rozkladech zadaných čísel.

Poznámka 1.3. V nejmenším společném násobku můžeme vidět analogii sjednocení prvočíselných rozkladů. Podobně největší společný dělitel připomíná průnik prvočíselných rozkladů.

Snadno rozložíme

$$\begin{aligned} 45 &= 3\cdot 3\cdot 5,\\ 30 &= 2\cdot 3\cdot 5, \end{aligned}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} D(45,30) &= 3\cdot 5 &&= 15,\\ n(45,30) &= 3\cdot 3\cdot 5\cdot 2 &&= 90. \end{aligned}$$

Poznámka 1.4. K hledání největšího společného dělitele čísel i výrazů se používá Euklidův algoritmus. Největšího společného dělitele čísel 30 a 45 bychom hledali následovně. Dělíme větší číslo menším a najdeme zbytek:

$$45 : 30 = 1,\ \text{zbytek } 15.$$

Číslo, kterým jsme dělili, se posune na pozici největšího čísla a dělíme ho zbytkem.

$$30 : 15 = 2,\ \text{zbytek } 0.$$

Nyní už zbytkem dělit nelze, a číslo 15 tak je největším společným dělitelem,

Zkusme ještě hledat největšího společného dělitele čísel 31 a 45:

$$\begin{aligned} 45:31 &= 1,\ \text{zbytek } 14,\\ 31:14 &= 2,\ \text{zbytek } 3,\\ 14:3 &= 4,\ \text{zbytek } 2,\\ 3:2 &= 1,\ \text{zbytek } 1,\\ 2:1 &= 2,\ \text{zbytek } 0. \end{aligned}$$

Z $D(31, 45) = 1$ plyne, že čísla jsou nesoudělná.

✎ *Cvičení* 1.3. Najděte:

1. $D(88,132)$, $D(65,264)$, $D(86,129,215)$,
2. $n(42,21)$, $n(32,56)$, $n(88,132)$.

✓ *Řešení.* 44, 1, 43✓21, 224, 264

1.2 Celá čísla

Starověcí matematikové neměli žádný důvod pracovat se zápornými čísly. Byli je ochotni akceptovat, jen pokud byl výsledek výpočtu nezáporný. V současné době vyspělé ekonomiky zase vycházejí z módy čísla kladná. Rozšíříme tedy raději množinu přirozených čísel o čísla k nim *opačná* a 0. Ve vzniklé množině celých čísel $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ se pohodlně sčítá, násobí a navíc i odčítá. Ještě více než dříve uplatníme znalost pořadí operací a práce se závorkami.

Například

$$-2\cdot(-2)-2:(3-4)+2\cdot(3)-4 = 4-2:1+6-4 = 4-2+2 = 2.$$

✎ *Cvičení* 1.4. Spočítejte:

1. $-2\cdot(-3)\cdot(-4)$,
2. $5-2\cdot(3-4\cdot 2)-5:(-1)$,
3. $4-6:(3-5)-6:3-5$.

✓ *Řešení.* -24✓20✓0

1.3 Racionální čísla – zlomky

Důvodem pro zavedení racionálních čísel je jejich uzavřenost vzhledem k dělení mimo čísla 0. Řekneme, že zlomek $\frac{p}{q}$ (p je čitatel, q je jmenovatel) je v *základním tvaru*, jestliže $D(p,q)=1$. Pokud zlomek není v základním tvaru, můžeme provést krácení (největším) společným dělitelem, tedy vydělení čitatele i jmenovatele (největším) společným dělitelem. Zlomek $\frac{2}{3}$ je v základním tvaru, $\frac{14}{21}$ není v základním tvaru, protože $D(14,21)=7$, a tak můžeme krátit:

$$\frac{14}{21}=\frac{7\cdot 2}{7\cdot 3}=\frac{2}{3}.$$

Pro vynásobení dvou zlomků nám stačí vynásobit oba čitatele i oba jmenovatele,

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}.$$

Opačnou operací ke krácení je rozšíření zlomku, kdy zlomek násobíme zlomkem se stejným nenulovým čitatelem a jmenovatelem, například $\frac{3}{3}=1$,

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{3}=\frac{15}{18}.$$

Poznámka 1.5. Rozšíření nemění hodnotu zlomku, narozdíl od obyčejného násobení,

$$\frac{5}{6}\neq\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{18}.$$

Nejmenší společný násobek uplatníme při sčítání a odčítání zlomků nebo při jejich porovnávání,

$$\frac{7}{30}+\frac{4}{45}=\frac{7}{30}\cdot\frac{3}{3}+\frac{4}{45}\cdot\frac{2}{2}=\frac{7\cdot 3+4\cdot 2}{90}=\frac{29}{90},$$

protože $n(30,45)=90$. Podobně zjistíme, že

$$\tfrac{4}{21} \quad > \quad \tfrac{1}{6},$$

protože

$$\tfrac{4\cdot 2}{42} \quad > \quad \tfrac{1\cdot 7}{42},$$

kde $n(21,6) = 42$.

Použít můžeme i *křížové pravidlo:*

$$\tfrac{4}{21} \quad > \quad \tfrac{1}{6},$$

a po vynásobení nerovnice oběma jmenovateli[2] dostaneme

$$4 \cdot 6 \quad > \quad 1 \cdot 21.$$

Čísla po výměně čitatele a jmenovatele, například $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{4}$, nazýváme *převrácená*.

Dělení zlomků můžeme převést na násobení zlomkem, který dostaneme jako převrácené číslo k děliteli:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Složené zlomky dostaneme, pokud se v čitateli nebo jmenovateli zlomku objevuje zlomek. Vzniknout mohou podílem dvou zlomků:

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2}.$$

Ve složeném zlomku můžeme krátit jak zlomky v čitateli a jmenovateli, tak čitatel čitatele s čitatelem jmenovatele a jmenovatel čitatele se jmenovatelem jmenovatele,

$$\frac{\frac{8}{14}}{\frac{6}{21}} = \frac{\frac{2\cdot4}{2\cdot7}}{\frac{2\cdot3}{3\cdot7}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}} = 2.$$

Občas se setkáme se *smíšenými zlomky*, vznikají ze součtu přirozeného čísla a zlomku, jen je vynecháno plus,

$$4\frac{3}{4} = 4 + \frac{3}{4}.$$

Cvičení 1.5.

1. Který ze zlomků $\frac{13}{21}$ a $\frac{7}{11}$ je větší?
2. Upravte $\frac{6}{15}$, $\frac{126}{-336}$ a $3\frac{6}{15}$ na základní tvar.
3. Spočtěte
$$\frac{10}{12} + \frac{7}{3}, \ \frac{12}{36} - \frac{126}{336}, \ \frac{32}{24} \cdot \frac{18}{24}, \ \frac{15}{36} \cdot \frac{28}{42}.$$

✓ *Řešení.* $\frac{7}{11}$ ✓ $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{17}{5}$ ✓ $\frac{19}{6}$, $-\frac{1}{9}$, 1, $\frac{5}{18}$

[2] Tuto úpravu více rozebereme v kapitole o nerovnicích

✎ *Cvičení* 1.6. Zjednodušte:

1.
$$\frac{\frac{15}{14}}{\frac{25}{35}},\quad \frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{8}}{\frac{7}{6}+\frac{1}{12}},\quad \frac{\frac{5}{14}-\frac{4}{21}}{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}},$$

2.
$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}-\frac{7}{12}}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{6}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\right].$$

✓ *Řešení.* $\frac{21}{10}$, $\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{3}$ ✓$\frac{55}{24}$

1.4 Reálná čísla

Už staří Řekové byli uchváceni možnostmi matematiky a mysleli, že vše se dá popsat celými čísly, přinejhorším jejich poměry. Kolem Pythagora vznikla v 6. století př. n. l. dokonce spíš sekta než škola. Její členové považovali matematiku téměř za černou magii. Jeden z nich ale projevil nepřiměřenou iniciativu. Zkoumal úhlopříčku čtverce (která rozděluje čtverec na dva rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky) o straně 1 a předpokládal, že její délka půjde vyjádřit racionálním číslem $\frac{p}{q}$ v základním tvaru. Z věty svého učitele věděl, že $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2+1^2$. Tedy

$$\frac{p^2}{q^2}=2,$$

pak ale musí být v prvočíselném rozkladu p^2 alespoň jednou 2, a proto p musí být sudé $(p = 2k$, k je přirozené číslo). Můžeme tak psát

$$\frac{(2k)^2}{q^2}=2$$

a

$$\frac{4k^2}{q^2}=2.$$

Po krácení číslem 2 dostaneme

$$\frac{2k^2}{q^2}=1,$$

odkud plyne, že i q musí mít ve svém prvočíselném rozkladu 2, aby byl podíl roven 1. Bylo by tedy potřeba, aby čísla p i q byla sudá, ale tak se dostáváme do sporu s předpokladem, že zlomek je v základním tvaru. Délka úhlopříčky jednotkového čtverce ($\sqrt{2}$) tedy není racionálním číslem. Tímto ale velmi zklamal své dosavadní souvěrce, tak jej vyhodili z lodi a nechali utopit.

Ponaučení z příhody se samo nabízí, pro délky úseček potřebujeme širší číselný obor než racionální čísla, a to (kladná) reálná čísla.

V množině reálných čísel pohodlně sčítáme, odčítáme, násobíme a dělíme (s výjimkou 0). Pro tyto operace na reálných číslech ($a, b, c \in \mathbb{R}$) platí:

$a+b$	$=$	$b+a$	komutativita sčítání
$a\cdot b$	$=$	$b\cdot a$	komutativita násobení
$(a+b)+c$	$=$	$a+(b+c)$	asociativita sčítání
$(a\cdot b)\cdot c$	$=$	$a\cdot(b\cdot c)$	asociativita násobení
$(a+b)\cdot c$	$=$	$a\cdot c+b\cdot c$	distributivita násobení vzhledem ke sčítání

Neopomeneme ani absolutní hodnotu reálného čísla a. Definujeme ji

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

A tak $|-8| = -(-8) = 8$, protože $-8 < 0$, zatímco $|8| = 8$, protože $8 > 0$. Čísla a a $-a$ nazýváme opačná.

✎ *Cvičení* 1.7. Spočtěte co nejjednodušeji:

1. $$34\cdot\pi - \sqrt{2}\cdot 5 - \pi\cdot 40 + (\sqrt{2}+\pi)\cdot 6,$$

2. $$\left|\frac{4\cdot|4-6| - |-5\cdot(-2)|}{|-3\cdot(-4)| - |6-9|}\right|.$$

✓ *Řešení.* $\sqrt{2}$✓$-\frac{2}{9}$

1.5 Mocniny

Nyní si nadefinujeme mocnění. Reálná čísla umíme mocnit přirozenou *mocninou* n,

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n},\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},$$

což snadno zobecníme na záporné celé mocniny pro nenulová a

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}},\ a\in\mathbb{R}-\{0\},\ n\in\mathbb{N}.$$

Dále platí

$$a^0 = 1,\ a\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Při výpočtech s přirozenými mocninami budeme používat následující pravidla:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
- $a^r : a^s = a^{r-s}$,
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$,
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$, kde $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $r, s \in \mathbb{Z}$.

Situace s neceločíselnými mocninami je o něco komplikovanější. Začneme odmocninami:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Například $\sqrt[4]{7}$ znamená hledat číslo, které po umocnění na 4 dá 7. Protože se nedají hledat sudé odmocniny ze záporných čísel, definujeme neceločíselné mocniny jen kladných reálných čísel.

Racionální mocniny si můžeme vyjádřit pomocí celých mocnin a odmocnin,

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Iracionální mocniny kladných reálných čísel si nijak nevyjádříme, při výpočtech musíme spoléhat na pravidla počítání s mocninami a počítač nebo kalkulačku.

Je třeba dávat pozor:

$$-2^2 \neq (-2)^2.$$

Vlevo mocníme číslo 2 vpravo -2. Dostaneme

$$-2^2 = -4 \text{ a } (-2)^2 = 4.$$

Pořadí operací hraje významnou roli i jindy,

$$\sqrt[4]{(-4)^2} = 2$$

má smysl, jelikož záporná čísla umíme mocnit. Naproti tomu

$$\left(\sqrt[4]{-4}\right)^2$$

nemá smysl, protože se po nás chce nejdříve odmocňovat záporné číslo. Nenajdeme reálné[3] číslo, které by dávalo ve čtvrté mocnině -4 nebo jakékoliv jiné záporné číslo, protože jsme odmocniny (racionální mocniny) definovali jen pro nezáporná čísla.

Pro reálné mocniny kladných čísel platí známá pravidla:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

[3]Komplexními čísly se zabývat nebudeme.

- $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$,
- $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$.

Z prvního vzorce vyplyne

$$5^6 \cdot 5^2 = 5^{6+2} = 5^8$$

nebo

$$2^\pi \cdot 2^{\sqrt{2}} = 2^{\pi+\sqrt{2}}.$$

Druhý vzorec použijeme třeba takto:

$$\frac{4^3}{4^2} = 4^3 \cdot 4^{-2} = 4^1 = 4$$

nebo

$$\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{6}}} = \pi^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = \pi^{\frac{1}{6}}.$$

Na podobném příkladě si ještě ukažme chování nulté mocniny,

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1.$$

U třetího vzorce si musíme dávat pozor hlavně na závorky, bez nich by se zase měnilo pořadí operací,

$$(4^3)^2 = 4^{3\cdot 2} = 4^6,$$

naproti tomu

$$4^{3^2} = 4^9.$$

Odmocniny obvykle převedeme na mocniny a používáme zmíněná pravidla

$$\left(\frac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{5}}\right)^\pi = \left(\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^\pi = \left(\frac{5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^\pi =$$

$$\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^\pi = \left(5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right)^\pi = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^\pi = 5^{\frac{\pi}{4}}.$$

Z posledního vzorce vychází částečné odmocňování. Například

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2\cdot 5} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

✎ *Cvičení* 1.8. Spočtěte:

1. $$2^4,\ (-4)^3,\ 5^{-2}+12^2,\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-5},\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4},\ 2-2\cdot 2^2,$$

2.
$$\sqrt[3]{2^9},\ \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt[3]{216},\ \ \sqrt[3]{0,027},\ \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{7}.$$

✓ *Řešení.* 16; -64; -144,04; 5^5; $\frac{16}{725}$; -6✓8; $\frac{2}{3}$; 6; 0,3; $\sqrt{7}$

✎ *Cvičení* 1.9. Proveďte částečné odmocnění:

$$\sqrt{50}+\sqrt[3]{24},$$

$$2\sqrt{3}-5\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75},$$
$$8\sqrt{12}-6\sqrt[3]{54}-7\sqrt{3}+3\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{250}-2\sqrt{147}.$$

✓ *Řešení.* $5\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}$ ✓$3\sqrt{3}$✓$-5\sqrt{3}+8\sqrt[3]{2}$

✎ *Cvičení* 1.10. Často se čísla zapisují pomocí mocnin čísla 10 tak, že se ponechá jen jedna nenulová číslice před desetinnou čárkou. Jedná se o *semilogaritmický tvar čísla*.

1. Upravte: $6\cdot 10^6,\ 2,34\cdot 10^{-6}$.

2. Zapište naopak $0,00018,\ 0,00000036$.

✓ *Řešení.* 6000000; $0,00000234$ ✓$1,8\cdot 10^4$;$3,6\cdot 10^{-7}$

✎ *Cvičení* 1.11. Mocniny se uplatní i při převádění fyzikálních jednotek, zapište 235kg pomocí gramů a 5,12cm^2 pomocí m^2.

✓ *Řešení.* 235000g, $5,12\cdot 10^{-4}$m^2

✎ *Cvičení* 1.12. Spočítejte:

1.
$$\frac{-4^3}{3^2}:\frac{(-2)^4}{3^5},\ \frac{2^{-2}\cdot 5^3\cdot 10^{-4}}{2^{-3}\cdot 5^2\cdot 10^{-5}},$$

2.
$$\left(3^{-1}\cdot 3^{-2}\right)^{-3}\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^5\cdot\left[\left(5^{-2}\right)^{-2}\right]^{-2}:\left[5:5^{-2}\right]^2,$$

3.
$$\left[2^{-2n}:(-2)^{-2n-2}\right]^{-2}\left[(-2)^{2n-1}\cdot 2^{-2n+1}\right]^3, n\in\mathbb{N},$$

4.
$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{27}{32}}},\ \frac{\sqrt[6]{\frac{25}{8}}}{\sqrt[3]{\frac{25}{32}}},\ \frac{\sqrt{2^3 3^2 4}}{\sqrt[3]{2^2 3^3 5^2}}.$$

✓ *Řešení.* $-2^2\cdot 3^3$;100✓$3^{-\frac{8}{3}}5^{-14}$✓-2^{-4}✓$\frac{4}{3},\ 2^{\frac{7}{6}},\ 2^{\frac{11}{6}}5^{-\frac{2}{3}}$

✎ *Cvičení* 1.13. Zjednodušte:

1.
$$62^{1+\sqrt{3}} \cdot 62^{1-\sqrt{3}} \cdot (62^2)^{-1},$$

2.
$$4^{\sqrt{5}+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{5}-1},$$

3.
$$\left[\frac{3^{\frac{\pi}{2}}5^{-1}}{(3^2 \cdot 5)^{\pi}}\right],$$

4.
$$\left(\frac{3^{\sqrt{7}}}{3^{\sqrt{5}}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

✓ *Řešení.* 1✓16✓$3^{-\frac{3}{2}\pi}5^{-1-\pi}$ ✓9

Připomeňme pravidla pro mocnění součtů a rozdílů:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Poznámka 1.6. Druhé mocniny záporných čísel jsou nezáporné, proto i $(a+b)^2 \geq 0$, a tedy $a^2 + 2ab + b^2$ je nezáporné pro jakákoliv a, $b \in \mathbb{R}$. Stojí za povšimnutí, že narozdíl od $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pro součet $a^2 + b^2$ žádný rozklad na součin neexistuje.

Pomocí vzorců snadno umocníme:

$$(5-\sqrt{2})^3 = 5^3 - 3 \cdot 5^2\sqrt{2} + 3 \cdot 5(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^3 = 125 - 75\sqrt{2} + 15 \cdot 2 - 2\sqrt{2} = 155 - 77\sqrt{2}$$

✎ *Cvičení* 1.14. Jak byste pomocí vzorců bez kalkulačky spočítali $18^2 - 16^2,\ 42^2 - 39^2,\ 108^2 - 112^2$?

✓ *Řešení.* čísla mají tvar $a^2 - b^2$, 68✓243✓880

Vzorce použijeme často při úpravách výrazů, doplňování na úplné čtverce a pro usměrnění zlomků s odmocninami ve jmenovateli. Pokud máme ve zlomku druhou odmocninu ve jmenovateli, obvykle se jí můžeme zbavit vhodným rozšířením zlomku tak, aby se odmocnina dostala pod druhou mocninu,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

V případě složitějších jmenovatelů použijeme vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1.$$

Musíme dávat pozor na pořadí operací, ve jmenovateli násobíme $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$.

✎ *Cvičení* 1.15. Usměrněte:

1. $$\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{\frac{3}{5}},\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}},\ \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}},\ \frac{8}{1-\sqrt{5}},\ \frac{8}{4-2\sqrt{2}},$$

2. $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2}-3)\sqrt{2}},\ \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{8})(\sqrt{2}-3)}{(3-\sqrt{2})\sqrt{3}},$$

3. $$\frac{(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{2}-1)^3}{2\sqrt{2}},$$

4. $$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

✓ *Řešení.* $\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{15}}{5},\ 2,\ -(2+\sqrt{3}),\ -2(1+\sqrt{5}),\ 4+2\sqrt{2}$✓ $\frac{-\sqrt{6}+3+\sqrt{15}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}(\sqrt{8}-\sqrt{3})}{3}$✓$3-\sqrt{2}$✓9

2 | Proměnné a výroky

2.1 Proměnné a kvantifikátory

Když starověcí Egypťané stavěli pyramidy a chtěli spočítat objem potřebného kamení, měli na to návod. Například: Máš pyramidu se čtvercovou základnou se stranou 60 metrů a výškou 50 metrů. Vynásob 60 krát 60, a dostaneš plochu podstavy 3600m^2. Dále součin vynásob 50 a jednou třetinou. Získal jsi objem pyramidy 60000m^3. Když chtěl někdo stavět pyramidu s jinou výškou nebo hranou podstavy, dosadil svoje hodnoty místo 50m a 60m. My budeme před stavbou místo čísel a návodu Egypťanů používat proměnné,

$$V = \frac{1}{3}a^2 v.$$

Protože délka hrany podstavy nebo výška jsou nezáporná čísla, doplníme ještě $a, v \in \mathbb{R}, a, v > 0$.

Proměnná zastupuje prvky nějaké množiny, kterou nazýváme *obor proměnné*. Znak $\in$ znamená, že proměnná nebo číslo patří do množiny, nebo jinak, je z množiny.

Například, platí $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{-74}{-74} = 1$, $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = 1$. Tedy podíl dvou stejných čísel kromě 0 dá 1. Máme množinu $\mathbb{R} - \{0\}$ a její prvky bude zastupovat proměnná p. Píšeme

$$\frac{p}{p} = 1,\ p \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Když budeme chtít zapsat, že součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi, postačí nám také jedna proměnná. Například $3|(22+23+24)$. Proměnnou n označíme třeba první z čísel. Další číslo pak bude $n+1$ a následující $n+2$. Oborem budou všechna přirozená čísla. Zapíšeme

$$3|(n+n+1+n+2),\ n \in \mathbb{N}.$$

Po dosazení přirozených čísel dostaneme součet kterýchkoliv tří po sobě jdoucích čísel.

Zkusme zapsat, že u součtu dvou reálných čísel nezávisí výsledek na pořadí (komutativita), například 3+56=56+3. Pro zápis budeme potřebovat dvě proměnné s obory $\mathbb{R}$,

$$a+b = b+a,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

✎ *Cvičení* 2.1. Zapište pomocí proměnné:

1. Součin jakéhokoliv reálného čísla s nulou je roven nule.
2. Asociativitu součtu reálných čísel, u součtu tří čísel nezáleží, jestli nejdříve sčítám prostřední s prvním nebo s posledním.
3. Distributivitu násobení vzhledem ke sčítání reálných čísel.
4. Číslo 6 dělí rozdíl třetí a první mocniny přirozeného čísla.
5. Uzavřenost $\mathbb{N}$ pro sčítání, součin.

✓ *Řešení.*

1. $a \cdot 0 = 0,\, a \in \mathbb{R},$
2. $(a+b)+c = a+(b+c),\, a, b, c \in \mathbb{R},$
3. $a(b+c) = ab+ac,\, a, b, c \in \mathbb{R},$
4. $6|(n^3-n),\, n \in \mathbb{N},$
5. $a+b \in \mathbb{N},\, a \cdot b \in \mathbb{N},\, a, b \in \mathbb{N}.$

Můžeme použít jakékoliv písmeno pro název proměnné, i přes určité zvyklosti:

- ☛ Pro přirozená čísla se často používá m, n.
- ☛ Ve funkcích uvidíme x, y, z, t, u, v.
- ☛ Parametry se často označují a, b, c, p, q, třeba pro kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$.
- ☛ π, e naopak nejsou proměnné, ale konstanty. Na ně musíme dávat pozor při derivování a integrování.

Spolu s proměnnými se v zápisech používá kvantifikátor $\forall$ značící, že vztah platí pro všechny prvky (většinou čísla) z oboru proměnné:

$$a+b \in \mathbb{N},\, \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Musíme jej rozlišovat od kvantifikátoru $\exists$, který používáme, když chceme napsat, že pro alespoň jedno číslo z oboru proměnné něco platí.

Například platí, že existuje přirozené číslo n tak, že následující podíl dá přirozené číslo:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{n-3}{n-4} \in \mathbb{N}.$$

Ale rozhodně toto tvrzení neplatí pro všechna přirozená čísla. Najdeme jediné takové přirozené číslo, a to 5.

Tvrzení bychom mohli zapsat pomocí kvantifikátoru $\exists!$, který používáme, když existuje právě jedno číslo nebo prvek s určitou vlastností,

$$\exists! n \in \mathbb{N}: \frac{n-3}{n-4} \in \mathbb{N}.$$

Tento kvantifikátor bychom zase nemohli použít pro tvrzení

$$\exists n \in \mathbb{N}: \frac{n-3}{n-4} \in \mathbb{Z}.$$

Tvrzení by nebylo pravdivé, protože snadno najdeme dvě čísla 3 a 5 s touto vlastností.

Kvantifikátor $\forall$ s příslušnou proměnnou a jejím oborem se dá psát před i po jednoduchém tvrzení. Můžeme říct, že pro všechna x něco platí i že něco platí pro všechna x. Kvantifikátor $\exists$ s příslušnou proměnnou a oborem píšeme na začátku tvrzení. Říkáme jen, že existuje x, pro které něco platí, ne naopak.

Narazíme však i na složitější tvrzení s více proměnnými i kvantifikátory. Můžeme třeba pronést, že pro každé celé číslo existuje celé číslo tak, že jejich součet je nulový:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z}: a+b=0,$$

Neměli bychom ale pravdu, kdybychom tvrdili, že existuje celé číslo tak, že pro každé celé číslo je jejich součet 0:

$$\exists a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z}: a+b=0.$$

V zápise těchto tvrzení se pouze přehodily kvantifikátory:

Častěji se řekne v případě prvního, pravdivého, tvrzení, že pro libovolné a najdu b takové, že jejich součet je nulový.

Cvičení 2.2. Zapište, že

1. existuje alespoň jedno přirozené číslo takové, že jeho odmocnina je přirozené číslo.
2. pro každé reálné číslo je součet jeho druhé mocniny a 1 kladný.
3. pro každé kladné číslo je součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty větší roven 2.
4. existuje jediné kladné číslo takové, že součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty je roven 2.
5. pro každé nenulové reálné číslo najdu reálné číslo, tak že jejich součin je 1.
6. existuje reálné číslo takové, že pro všechna reálná čísla, je jejich součin nulový.

7. Zkuste napsat pravidla pro mocnění s celočíselnými a reálnými mocninami.

✓ *Řešení.*

1. $\exists a \in \mathbb{N} : \sqrt{a} \in \mathbb{N}$,
2. $x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
3. $p + \frac{1}{p} \geq 2 \ \forall p \in \mathbb{R}, p > 0$,
4. $\exists! p \in \mathbb{R}, p > 0 : p + \frac{1}{p} \geq 2$,
5. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1$,
6. $\exists b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} : b \cdot c = 0$.

2.2 Výroky

Tvrzení, která jsme zapisovali, se matematicky nazývají *výroky*.

Definice 2.1. Výrok je každá oznamovací věta, u které má smysl uvažovat, jestli je pravdivá nebo nepravdivá.

„Dnes je úterý.”

Tento výrok je v úterý pravda, jiný den v týdnu nepravda.

O větě

„Existuje mimozemský život.”

nejsme schopni rozhodnout, jestli je pravdivá, nebo ne. Říká se jí *hypotéza*. Výrokem by se stala, kdyby ji někdo dokázal, nebo vyvrátil. Ani

„Pozor na psa.”

není výrokem, protože to není oznamovací věta.

My se budeme setkávat spíše s výroky

$$4|8$$

či

$$3 \cdot 5 = 15$$

pravdivými, kterým přiřadíme *pravdivostní hodnotu* 1, nebo s výroky nepravdivými

$$\frac{1}{1+5^2} = 1 + \frac{1}{5^2},$$

či

$$\sqrt{(x^2)} = x \forall x \in \mathbb{R}.$$

Takovým přiřazujeme hodnotu[1] 0.

Výroky kvůli jednoduššímu zacházení označujeme velkými písmeny $A, B, C, \dots,$

$$C = 4|6.$$

Píšeme $P(C) = 0$ pro nepravdivý výrok nebo $P(4|8) = 1$ pro pravdivý výrok.

Z jednoduchých výroků skládáme *výroky složené*. Užíváme přitom *logické spojky:*

- ☛ $A \wedge B$ konjunkce výroků,
- ☛ $A \vee B$ disjunkce výroků,
- ☛ $A \Rightarrow B$ implikace výroků,
- ☛ $A \Leftrightarrow B$ ekvivalence výroků.

Číst budeme:

- ☛ $A \wedge B$ A a zároveň B,
- ☛ $A \vee B$ A nebo B,
- ☛ $A \Rightarrow B$ jestliže A, pak B,
- ☛ $A \Leftrightarrow B$ A právě tehdy když B.

Pravdivostní hodnoty složených výroků najdeme v tabulce 2.1.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tabulka 2.1: Pravdivostní hodnoty složených výroků

Nejjednodušší použití tabulky je určení pravdivostní hodnoty složeného výroku z pravdivostních hodnot jednoduchých výroků. Hodnoty v tabulce se dají vnímat tak, že pokud jsou dva výroky pravdivé, jsou pravdivé i jejich konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence. Pro nepravdivý výrok A a pravdivý B (předposlední řádek tabulky) jsou pravdivé jen jejich disjunkce a implikace.

[1] nebo v písemkách 5, 4, F, …

Uvažujme jednoduché výroky:

$$A = \text{„Číslo 3 je přirozené.“},$$

$$B = \text{„Číslo 3 není přirozené.“}.$$

Pomocí jejich pravdivostních hodnot

$$P(A) = 1, \quad P(B) = 0$$

dokážeme určit i pravdivost složených výroků

$$P(A \wedge B) = 0, \;\; P(A \vee B) = 1, \;\; P(A \Rightarrow B) = 0, \;\; P(A \Leftrightarrow B) = 0.$$

Často ale použijeme tabulku i naopak. Například, když je konjunkce dvou výroků pravdivá, musí být oba výroky pravdivé. V matematických větách se používá hlavně spojka implikace. Když je tvrzení A pravdivé a tvrzení $A \Rightarrow B$ také pravdivé, pak podle tabulky nezbývá, než aby i tvrzení B bylo pravdivé. V tabulce pravdivostních hodnot to znamená: $P(A) = 1$ se nachází v prvních dvou řádcích, z těchto dvou řádků je implikace výroků pravdivá jen v prvním řádku pro obě tvrzení pravdivá.

Povšimněme si také, že pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci nezáleží na pořadí jednoduchých výroků:

$$P(A \wedge B) = P(B \wedge A), \; P(A \vee B) = P(B \vee A) \; P(A \Leftrightarrow B) = P(B \Leftrightarrow A).$$

Projeví se to u rovnosti, průniku a sjednocení množin, jejich nezávislostí na pořadí množin.

Negaci výroku A označíme $\neg A$ (viz následující tabulka). Je to výrok, kterému změníme pravdivostní hodnotu pomocí:

„Není pravda, že A.“

„Není pravda, že dnes je úterý.“

nebo

„Dnes není úterý.“

A	$\neg A$
1	0
0	1

Spojky nepoužíváme ke konstrukcím typu:

$$5|12 \;\Rightarrow \text{dnes je úterý},$$

i když podle tabulky může být vzniklé tvrzení pravdivé. Snažíme se o věcnou souvislost.

Pokud se v tvrzení vyskytují proměnné bez kvantifikátoru, jedná se o *výrokové formy*, například

$$2|x,$$

$$x > 0.$$

Výrokové formy se značí $A(x), B(x), \ldots$ Výroky se z nich stanou buď dosazením za proměnnou, nebo přidáním kvantifikátoru,

$$2|4,$$

$$\forall x \in \mathbb{N}:\ 2|x,$$

až potom získají pravdivostní hodnotu.

Matematické věty mají nejčastěji tvar výroku

$$\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x),$$

$$\exists x \in D : A(x) \Rightarrow B(x).$$

Výrokové formě $A(x)$ se říká *předpoklad věty*, výrokové formě $B(x)$ *tvrzení věty*. Protože matematické věty představují pravdivé výroky (implikace $A(x) \Rightarrow B(x)$ musí platit pro každé $x \in D$), platnost $A(x)$ postačuje pro platnost $B(x) \forall x \in D$. Mezi oběma výrokovými formami se samozřejmě předpokládá věcná souvislost. Často se obecný kvantifikátor vynechává a zapisuje se jen $A(x) \Rightarrow B(x)$. Řekne se, jestliže platí $A(x)$, platí i $B(x)$. Z výroku

Pro každé přirozené číslo n platí, je-li n dělitelné 6, pak je sudé.

někdy zůstane

„Je-li přirozené číslo dělitelné 6, je sudé."

Matematické věty jsou pravdivé, protože se dají dokázat. Nejjednodušším způsobem důkazu věty ve tvaru

$$\forall x \in X:\ A(x) \Rightarrow C(x)$$

je *důkaz přímý*. Chceme-li dokázat pravdivost implikace $A \Rightarrow C$, sestavujeme řetězec pravdivých implikací

$$A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow C,$$

tedy

$$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n \Rightarrow C,$$

odtud pak plyne pravdivost dokazované implikace. Když je pravdivé tvrzení A i implikace $A \Rightarrow B_1$, je pravdivé i B_1, když je pravdivé B_1 i implikace $B_1 \Rightarrow B_2$, je pravdivé i $B_2, \ldots$

Zkusíme dokázat

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ je sudé} \Rightarrow n^2 \text{ je sudé}.$$

Sestavujeme řetězec pravdivých implikací:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ je sudé} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n^2 \text{ je sudé.}$$

Už jsme také nejednou použili důkaz sporem. Vyjdeme z toho, že pokud negace výroku A je nepravdivý výrok, pak je A pravdivý. Chtěli jsme dokázat nekonečnost počtu prvočísel, řekněme výrok A. Uvažovali jsme jeho negaci $\neg A$, že prvočísel je konečně mnoho. Z konečnosti prvočísel jsme odvodili nepravdivý výrok B, že číslo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots p_{\text{max}} + 1$ není ani složené číslo, ani prvočíslo. Dokázali jsme tak pravdivost složeného výroku $\neg A \Rightarrow B$. Z tabulky pravdivosti složených výroků vidíme, že $\neg A$ musí být nepravdivý, aby mohl implikovat nepravdivý výrok (z pravdivého výroku nelze odvodit nepravdivý). Protože $\neg A$ je nepravdivý, A bude pravdivý. Protože prvočísel není konečně mnoho, bude jich nekonečně mnoho.

3 | Množiny

3.1 Základní pojmy

Množina je základní pojem matematiky, a proto (přesto) se nedefinuje. Množinou rozumíme souhrn či skupinu objektů. Množinu zadáme tak, že označíme objekty, které do ní patří. Pokud prvek x patří do množiny A, zapíšeme $x \in A$, pokud nepatří píšeme $x \notin A$. Množinu zadáváme dvěma způsoby:

- Vyjmenujeme všechny její prvky,

$$\{\text{Hynek, Vilém, Jarmila}\},$$

$$\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

- Popíšeme charakteristickou vlastnost prvků množiny. (Množina prvočísel větších než 5, množina všech krychlí.)

Při zadávání charakteristické vlastnosti prvků množiny potřebujeme mít dánu množinu všech prvků, které nás v tu chvíli zajímají, říká se jí *univerzum*, značí se U. Zápis pak vypadá:

$$M = \{x \in U; V(x)\}.$$

$V(x)$ je výroková forma[1] a $x \in U$ je prvkem množiny M, pokud jeho dosazením do $V(x)$ získáme pravdivý výrok.

Příkladem je množina

$$M = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\}.$$

Uvažujeme tedy jen o přirozených číslech $(x \in \mathbb{N})$. Z výrokové formy $x < 6$ dostaneme pravdivý výrok $1 < 6$ pro $x = 1$. Podobně je pravda, že $2 < 6$ pro $x = 2$ nebo $5 < 6$ pro $x = 5$. Naproti tomu neplatí $6 < 6$ pro $x = 6$. Nepravdivý výrok dostaneme i pro větší čísla, například $P(156 < 6) = 0$, a tak tato čísla $6, 7, \dots, 156, \dots$ do množiny M nepatří. Tedy jen čísla $1, 2, 3, 4, 5$ budou patřit do M. Můžeme psát

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

[1] Kromě znaku „ ; ” se v zápisu množiny odděluje výroková forma i pomocí „ : ”, „ | ” nebo „ , ”.

Ve výrokových formách používáme logické spojky. Zapíšeme třeba množinu M_1 přirozených čísel dělitelných 2 a zároveň 3,

$$M_1 = \{x \in \mathbb{N};\ 2|x \wedge 3|x\}.$$

Prvky M_1 mají zároveň dvě vlastnosti, a tak

$$M_1 = \{6, 12, 18, \dots\}.$$

Změnou spojky dojde k zásadní změně

$$M_2 = \{x \in \mathbb{N};\ 2|x \vee 3|x\}.$$

Prvky M_2 mají aspoň jednu ze dvou vlastností, a tak

$$M_2 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}.$$

Množina, která neobsahuje žádné prvky, se nazývá *prázdná množina,* značí se $\emptyset$ nebo $\{\}$. Množina přirozených čísel větších než 5 a menších než 4 je prázdná,

$$\{x \in \mathbb{N};\ x > 5 \wedge x < 4\} = \emptyset.$$

Řekneme, že množina A je *podmnožinou* B, když každý prvek A je i prvkem B. Píšeme

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Poznámka 3.1. Pro zápis podmnožin se někdy používá $A \subseteq B$. Pomocí znaku $\subset$ se pak zapisují vlastní podmnožiny $A \subset B$, kde $A \neq B$.

Množiny se rovnají, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B a každý prvek množiny B je prvkem množiny A. Píšeme

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Sjednocením množin A, B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich,

$$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \vee x \in B\}.$$

Platí:

- ☛ $A \cup A = A$,
- ☛ $A \cup B = B \cup A$,
- ☛ $A \cup \emptyset = A$,
- ☛ $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

Například druhý výrok snadno ukážeme z definice sjednocení.

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in U, x \in B \wedge x \in A\} = B \cup A$$

Využili jsme nezávislosti konjunkce na pořadí výroků a dostali jsme definici $B \cup A$.

Průnikem množin A, B je množina všech prvků, které patří do obou těchto množin zároveň,

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}.$$

Platí:

- ☛ $A \cap A = A$,
- ☛ $A \cap B = B \cap A$,
- ☛ $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- ☛ $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

✎ *Cvičení* 3.1. Uměli byste dokázat druhé tvrzení?

Rozdílem množin A, B je množina $A - B$ všech prvků, které patří do A, ale ne do B,

$$A - B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Velmi často budeme používat rozdíl množin pro zápis definičních oborů funkcí s „dírou" $(\mathbb{R} - \{1\})$.

Platí:

- ☛ $A - A = \emptyset$,
- ☛ $A - \emptyset = A$,
- ☛ $\emptyset - A = \emptyset$,
- ☛ $A - B \subset A$.

Pokud $A \subset B$, říkáme rozdílu $B - A$ doplněk množiny A v množině B. Jestliže je množina B univerzem, říkáme rozdílu $B - A$ *doplněk množiny* A a značíme A' nebo A^c.

Doplňkem k množině $M = \{3, 4, 5\}$ v množině $\mathbb{N}$ je množina

$$M' = \mathbb{N} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\} \cup \{6, 7, 8, \dots\}.$$

✎ *Cvičení* 3.2. Zapište prvky množiny:

1. $\{n \in \mathbb{N}; n < 5\}$,
2. $\{n \in \mathbb{N}; 3|n \wedge n < 11\}$,
3. $\{n \in \mathbb{N}; n|56\}$,

4. $\{n \in \mathbb{N};\, n = 4k-1,\, k \in \mathbb{N}\}$, k je pomocná proměnná, kterou někdy musíme použít, třeba abychom zapsali dělitelnost číslem se zbytkem.
5. $\{n \in \mathbb{N};\, 4|(n+1)\}$,
6. $\{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

✓ *Řešení.*

1. $\{1, 2, 3, 4\}$,
2. $\{3, 6, 9\}$,
3. $\{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$,
4. $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$,
5. $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$,
6. $\{\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{1\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}, \dots\}$.

✎ *Cvičení* 3.3. Zapište množiny:

1. přirozených čísel menších než 10,
2. přirozených čísel dělitelných dvěma,
3. lichých přirozených čísel,
4. sudých přirozených čísel menších než 10,
5. reálných čísel větších než -3 a menších než 5,
6. racionálních čísel menších než 3 nebo větších než 5,
7. $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

✓ *Řešení.*

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{n \in \mathbb{N};\, n < 10\}$,
2. $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{n \in \mathbb{N};\, 2|n\} = \{n \in \mathbb{N};\, n = 2k,\, k \in \mathbb{N}\}$,
3. $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{n \in \mathbb{N};\, 2|(n+1)\} = \{n \in \mathbb{N};\, n = 2k+1,\, k \in \mathbb{N}\}$,
4. $\{2, 4, 6, 8\} = \{n \in \mathbb{N};\, 2|n \wedge n < 10\}$,
5. $\{x \in \mathbb{R};\, x > -3 \wedge x < 5\}(= (-3, 5))$,
6. $\{x \in \mathbb{Q};\, x < -3 \vee x > 5\}$,
7. $\{n \in \mathbb{N};\, n = k^2,\, k \in \mathbb{N},\, k < 7\}$.

3.2 Reálná osa

Podmnožiny množiny reálných čísel znázorňujeme na přímce. Zvolme si na přímce bod O a napravo od něj bod J. Vzdálenosti bodů O a J budeme říkat *jednotka*. Na přímce nyní můžeme znázornit jakékoliv reálné číslo r. Kladné číslo r bude ležet napravo v $r-$násobné vzdálenosti od O než J. Záporné číslo r bude ležet nalevo v $r-$násobné vzdálenosti od O než J. Této přímce budeme říkat *reálná osa* a reálným číslům body reálné osy.

Nejčastěji se na reálné ose znázorňují *intervaly*. Jsou to množiny reálných čísel ohraničené čísly a a b :

$$\langle a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \wedge x \leq b\},$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \wedge x < b\},$$

$$\langle a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \wedge x < b\}.$$

$$(a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \wedge x \leq b\}.$$

Intervaly nemusí být ohraničeny:

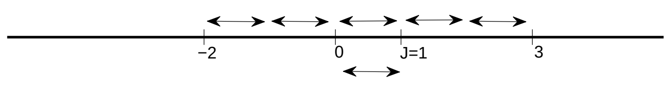
$$(-\infty,b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\},$$

$$\langle a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\},$$

$$(-\infty,\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

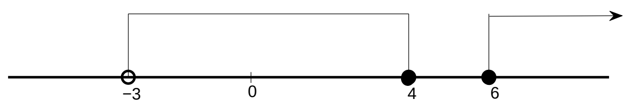
Poznámka 3.2. Protože ∞, $-\infty$ nejsou reálná čísla a nepatří na číselnou osu, používáme kulatou závorku.

Graficky se patřičnost krajního bodu k intervalu označuje kolečkem, prázdným, když je interval otevřený a bod do něj nepatří, plným, když je interval uzavřený a bod do něj patří.



Obrázek 3.1: Reálná osa

Stejně jako každému reálnému číslu přiřadíme jediný bod na přímce (poté co na ní zvolíme body O, J), tak můžeme naopak přiřadit každému bodu osy jediné reálné číslo. Většinou budeme dále značit bod J jako 1.



Obrázek 3.2: Znázornění intervalů $(-3, 4\rangle$ a $\langle 6, \infty)$

Definice 3.1. Nechť $c, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Otevřený interval $(c-\delta, c+\delta)$ se nazývá $\delta-$*okolí* bodu c, značí se $U_\delta(c)$, číslo δ se nazývá *poloměr okolí*.

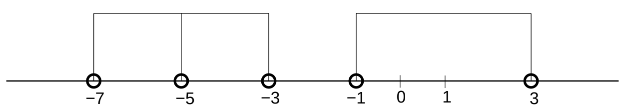
Definice 3.2. Nechť $c, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Sjednocení otevřených intervalů $(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ se nazývá *redukované (prstencové)* $\delta-$*okolí* bodu c, značí se $P_\delta(c)$.

Setkáme se s více zápisy $\delta-$okolí c :

$$U_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c-\delta, c+\delta)\},$$

$$U_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; c-\delta < x < c+\delta\},$$

$$U_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; |c-x| < \delta\}.$$



Obrázek 3.3: Redukované 2-okolí bodu -5 a 2-okolí bodu 1

✎ *Cvičení* 3.4.

1. Zapište redukované 2-okolí bodu -5.

2. Jak byste zapsali redukované okolí bodu c?

✓ *Řešení.*

1. $P_2(-5) = (-7, -5) \cup (-5, -3)$.

2. $$P_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)\},$$
$$P_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq c, c-\delta < x < c+\delta\},$$
$$P_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |c-x| < \delta\}.$$

Definice 3.3. Nechť c, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Polootevřený interval $\langle c, c+\delta)$ se nazývá *pravé $\delta-$okolí* bodu c, značí se $U_\delta(c)$, číslo δ se nazývá poloměr okolí.

Definice 3.4. Nechť c, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Otevřený interval $(c-\delta, c)$ se nazývá *levé redukované $\delta-$okolí* bodu c, značí se $P_\delta(c)$.

Poznámka 3.3. Okolím bodu c se často myslí i jakýkoliv otevřený interval obsahující c. Takový interval pak vždy obsahuje i nějaký symetrický, který by vyhovoval předchozí definici okolí.

Na tomto místě uvedeme i definice hromadného bodu množiny, který budeme potřebovat při zavádění limit.

Definice 3.5. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Bod $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *hromadný bod* množiny M, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny M.

Máme i další možnost:

Definice 3.6. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Bod $x \in \mathbb{R}$ se nazývá hromadný bod množiny M, jestliže každé redukované okolí bodu x obsahuje aspoň jeden bod množiny M.

Poznámka 3.4. Hromadný bod množiny do této množiny nemusí patřit. V první definici by stačilo říct, že aspoň dva body musí patřit do M v jakémkoliv okolí bodu x. Ten druhý bod oproti redukovanému okolí totiž může být samotný bod x. Pro nás nejzajímavější hromadné body budou okraje intervalů. Ať už krajní bod patří nebo nepatří k intervalu, je jeho hromadným bodem (stejně jako všechny body uvnitř).

Definice 3.7. Bod $x \in M$, který není hromadným bodem množiny M, se nazývá *izolovaný bod* množiny M.

Izolovanému bodu množiny M tedy najdeme takové redukované okolí, že v něm nebude žádný bod množiny M.

✎ *Cvičení* 3.5. Uvažujte množiny $A = (3, 5)$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

1. Najděte $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.
2. Najděte hromadné a izolované body těchto množin.
3. Jaké jsou množinové vztahy mezi přirozenými, celými, racionálními a reálnými čísly.

✓ *Řešení.*

1. $A \cup B = \langle 3, 5\rangle \cup \{6\}$, $A \cap B = 4$, $A - B = (3,5) - \{4\}$.
2. Hromadné body $A \cup B = \langle 3, 5\rangle$, $A \cap B = \emptyset$, $A - B = \langle 3,5\rangle$. Izolované body $A \cup B = \{6\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A - B = \emptyset$.
3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

3.3 Kartézský součin množin a zobrazení

Připomeňme si pojmy kartézského součinu množin a zobrazení, které nám budou užitečné pro pochopení funkcí. $n-$ticí prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme $n-$prvkovou množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. U ní nám nezáleží na pořadí. Pokud ale určíme pořadí, ve kterém prvky následují po sobě, stanovíme první, druhý, ... , $n-$tý prvek, dostáváme uspořádanou $n-$tici prvků, neboli konečnou posloupnost, kterou označíme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebo $(x_k)_{k=1}^n$, kde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Aby se dvě uspořádané $n-$tice rovnaly, musí se všechny prvky na stejných místech rovnat:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n).$$

Když jsou dány dvě množiny A, B, můžeme vytvořit množinu všech uspořádaných dvojic $(x, y), x \in A, y \in B$. Tuto množinu nazýváme *kartézským součinem* množin A, B, označujeme ji $A \times B$. Podobně bychom mohli pro množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vytvořit kartézský součin $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, množinu všech uspořádaných $n-$tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$.

Budeme uvažovat dvě množiny $A = \{-1, 4\}$ a $B = \{10, 15, 16\}$. Dostaneme kartézský součin $A \times B = \{(-1, 10), (-1, 15), (-1, 16), (4, 10), (4, 15), (4, 16)\}$. Pro nás nejdůležitější bude kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ všech dvojic reálných čísel $\mathbb{R}^2 = \{(x,y), x, y \in \mathbb{R}\}$.

✎ *Cvičení* 3.6.

1. Najděte průnik a sjednocení množin A, B,

$$A = \{(2, 3, 4), (4, 3, 2), (3, 4, 2)\},$$

$$B = \{(4, 3, 4), (2, 3, 4), (4, 3, 2), (2, 4, 3)\}.$$

2. Máme dány množiny $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{b, c, d\},\ C = \{\gamma\}$.
   Najděte $A \times B,\ B \times A,\ A \times A (= A^2),\ A \times B \times C,\ C^2$.

3. Zapište prvky množiny $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x < 10, y = x^2\}$.

✔ *Řešení.*

1. $A \cap B = \{(2, 3, 4), (4, 3, 2)\}$
   $A \cup B = \{(2, 3, 4), (4, 3, 2), (3, 4, 2), (4, 3, 4), (2, 4, 3)\}$;

2. $A \times B = \{(1,b), (1,c), (1,d), (2,b), (2,c), (2,d), (3,b), (3,c), (3,d)\}$
   $B \times A = \{(b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3), (d,1), (d,2), (d,3)\}$
   $A^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
   $A \times B \times C = \{(1,b,\gamma), (1,c,\gamma), (1,d,\gamma), (2,b,\gamma), (2,c,\gamma), (2,d,\gamma)$
   $(3,b,\gamma), (3,c,\gamma), (3,d,\gamma)\}$
   $C^2 = \{(\gamma, \gamma)\}$;

3. $\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),\dots,(9,81)\}$.

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Přiřadíme-li ke každému prvku $x \in A$ právě jeden prvek $y \in B$, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x,y) \in A \times B$, která se nazývá *zobrazení* množiny A do množiny B. Říkáme, že prvek x je *vzor* prvku y a prvek y je *obraz prvku* prvku x v zobrazení F. Říká se také, že y je *hodnota zobrazení* F v bodě x a značí se $y = F(x)$. Množina A se nazývá *definiční obor* zobrazení F, označuje se D_F. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá *obor hodnot zobrazení* F a značí se H_F. Platí $H_F \subset B$.

Když $H_F = B$, F je zobrazení *na* množinu B. Jestliže je v zobrazení F každý prvek $y \in H_F$ obrazem právě jednoho prvku $x \in A = D_F$, tedy dva různé vzory mají vždy dva různé obrazy, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$, pak se zobrazení F nazývá *prosté*. Zobrazení na množinu se také říká *surjekce*, prostému zobrazení *injekce*. Pokud je zobrazení zároveň injekce a surjekce, nazývá se *bijekce*.

✎ *Cvičení* 3.7. Mějme množiny $A = \{1,2,3\}$, $B = \{b,c,d\}$. Jsou následující množiny zobrazeními A do B? Když ano, jsou prostá nebo na B?

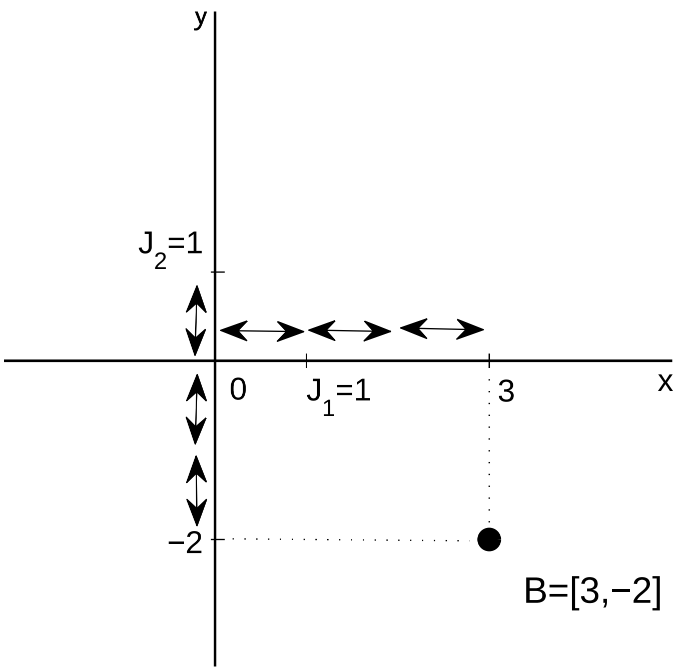
1. {(1,b), (2, b)},
2. {(1,c), (2,b), (2, c)}
3. {(1,b), (2, b), (3, b)},
4. {(1,c), (2,b), (3, a)}.

✓ *Řešení.*

1. Není zobrazení, protože každému prvku z A musíme přiřadit nějaký prvek.
2. Není zobrazení, protože žádnému prvku z A nesmíme přiřadit víc než jeden prvek.
3. Je zobrazení.
4. Je prosté zobrazení na množinu B, tedy bijekce.

Čísla jsme znázorňovali na reálné ose, dvojice reálných čísel budeme znázorňovat v rovině. Abychom jednoznačně popsali body roviny, budeme potřebovat dvě čísla – *souřadnice*, nejdříve však musíme na rovině zvolit tři body, které nám určí *soustavu souřadnic*. Nakreslíme v rovině dvě různoběžné přímky, (ne nutně) vodorovnou x a (ne nutně) svislou y. Bod, kde se protnou, nazveme *počátek* a označíme O. Vpravo od něj na vodorovné přímce zvolíme bod J_1, obraz čísla 1 na ose x a J_2 obraz čísla 1 na ose y.

Každému bodu roviny pak budou jednoznačně přiřazena dvě čísla, kolikrát je tento bod dál od O než J_1 a kolikrát je dál od O než J_2. Nalezená čísla budou souřadnicemi bodu v soustavě souřadnic *Oxy*. Naopak také můžeme dvojici čísel přiřadit bod v soustavě *Oxy*. Nejčastěji volíme body J_1 a J_2 stejně daleko od O. Pokud jsou osy navzájem kolmé, soustava souřadnic se nazývá *kartézská*.



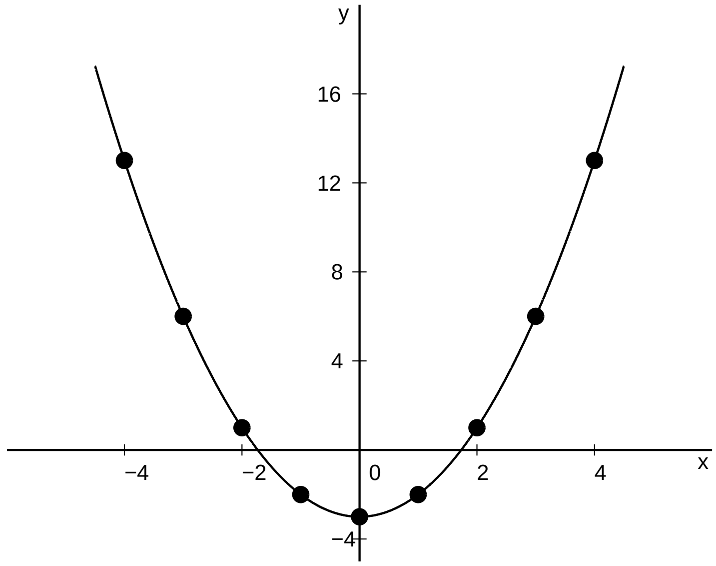
Obrázek 3.4: Zobrazení bodu se souřadnicemi [3,-2]

Jediná obtížněji chápaná věc je volení soustavy souřadnic. Můžeme si představit několik bodů, teček na papíře. Souřadnice, dvojice čísel, jim přiřadíme, až když si na papír nakreslíme osy a zvolíme na obou jednotky. Stejně v opačném případě, když budeme mít dvojice reálných čísel, body s těmito souřadnicemi vyneseme na papír poté, co si na něj nakreslíme osy a zvolíme jednotky. Až pak budeme vědět kam. Podobně můžou lidé na Zemi hledat souřadnice (tedy přiřadit místu zeměpisnou šířku a délku) až od té doby, co si za osy zvolili poledník procházející Greenwichem a rovník.

Většinou neznázorňujeme jen jednu dvojici čísel, nýbrž jejich množiny.[2] Pokud je dvojic konečný počet, zvolíme si soustavu souřadnic a jednotlivým dvojicím nakreslíme body. Někdy jsou množiny dvojic zadány rovnicí. Pak obvykle pro několik x, pro která má rovnice smysl, najdeme y (pro přehlednost nalezené dvojice zapíšeme do tabulky) zakreslíme je a snažíme se dovtípit, jak celá množina vypadá. Zkusme zobrazit množinu $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y = 3\}$. Tabulka a graf mohou vypadat následovně:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	13	6	1	−2	−3	−2	1	6	13

[2] Speciálním druhem takových množin jsou reálné funkce reálné proměnné.

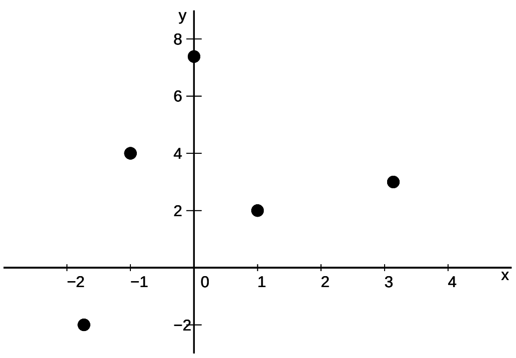


Obrázek 3.5: Dokreslení množiny z nalezených bodů

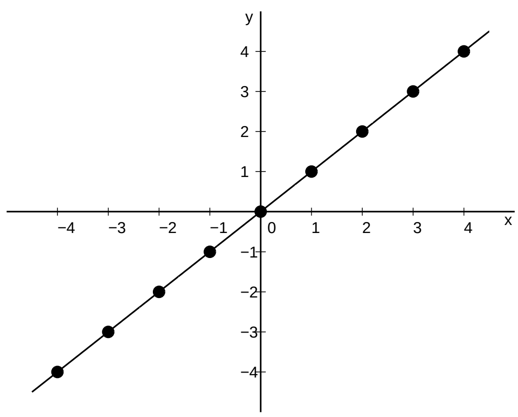
✎ *Cvičení* 3.8. Znázorněte graficky množiny

1. $M_1 = \{(1,2), (-1,4), (-\sqrt{3},-2), (\pi,3), (0,e^2)\}$,
2. $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$,
3. $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = -\sqrt{1-x^2}\}$,
4. $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\}$.

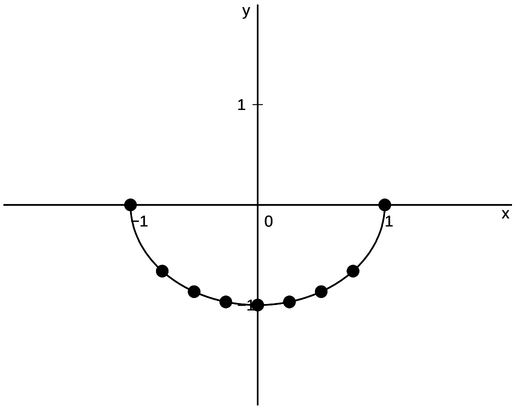
✓ *Řešení.*



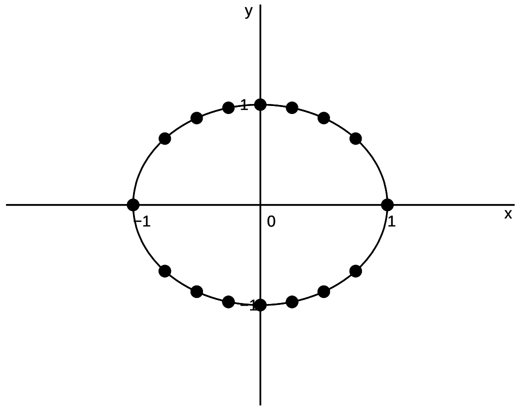
Množina M_1



Množina M_2



Množina M_3



Množina M_4

3.4 Rozšířená reálná osa

Kvůli počítání limit nebo definici intervalů rozšiřujeme reálnou osu $\mathbb{R}$ o prvky ∞ a $-\infty$, takzvané *nevlastní body reálné osy.*

Definice 3.8. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se nazývá *rozšířená reálná osa.*

Poznámka 3.5. Také můžeme říct, že se jedná o množinu hromadných bodů množiny reálných čísel.

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ definujeme:

- uspořádání $-\infty < c < \infty$,
- absolutní hodnotu $|-\infty| = |\infty| = \infty$,
- sčítání a odčítání: $\infty + \infty = \infty,\ -\infty - \infty = -\infty,\ c \pm \infty = \pm\infty$.
  Nedefinujeme $\infty - \infty,\ -\infty + \infty$.
- Násobení a dělení:

$$\begin{aligned}
\infty \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty), \\
c \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty, c > 0, \\
c \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty, c < 0, \\
\frac{c}{\pm\infty} &= 0, \\
\frac{\pm\infty}{c} &= \pm\infty, c \neq 0.
\end{aligned}$$

  Nedefinujeme $0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{c}{0},\ c \in \mathbb{R}^*$.

☛ Mocniny s celým mocnitelem:

$$\infty^n = \infty,\ \infty^{-n} = 0, n \in \mathbb{N},$$

$$-\infty^n = (-1)^n \cdot \infty^n,\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Nedefinujeme $(\pm\infty)^0$.

✎ *Cvičení* 3.9. Spočítejte:

1. $\infty - 1$, $-2 - \infty$,
2. $-3 \cdot \infty + \infty - 1500 \cdot \infty$,
3. $-0{,}01 \cdot \infty + \frac{\pi}{\infty} - \infty^3$,
4. $\frac{-15}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{-20}{\infty}$.

✓ *Řešení.* ∞, $-\infty$✓není definováno✓$-\infty$✓není definováno, není definováno, 0

3.5 Nekonečné množiny

Představme si hotel s názvem Infinity☆☆☆, který má pokoje očíslované přirozenými čísly. Od obyčejných hotelů se tak liší jen tím, že pro každé přirozené číslo najdeme odpovídající jednolůžkový pokoj.

Když je hotel plně obsazený, bydlí v něm nekonečně mnoho hostů. Ale co když přijede další host? V našem hotelu to nezpůsobí žádný problém. Všichni dosavadní hosté jsou s omluvou přestěhováni na pokoj s číslem o 1 větším a nový host dostane pokoj 1. Ať uvažujeme jakékoliv číslo pokoje, jeho původní obyvatel má zase kde bydlet. Stejně by hotelový management vyřešil příjezd celého autobusu nových hostů. Dokonce i kdyby byl náhle zavřen podobný blízký hotel a všichni jeho hosté by chtěli strávit zbytek dovolené v tom našem, zkušeného ředitele by to nerozhodilo. Stávající hosty by přesunul do pokojů s dvakrát větším číslem a ty nové do pokojů s dvakrát větším číslem zmenšeným o 1.

Udělejme si pořádek v terminologii. Pokud jsme schopni zapsat počet prvků v množině přirozeným číslem, řekneme, že množina je *konečná*. Když konečná není, ale její prvky můžeme po jednom umístit do pokojů našeho hotelu (očíslovat přirozenými čísly, najít bijektivní zobrazení na množinu přirozených čísel), pak je množina (nekonečná) *spočetná*. Ve zbylých případech se jedná o *nespočetné* množiny. Konečně mnoho je žáků ve třídě, atomů ve vesmíru a krav nebo solárních panelů na louce. Spočetné jsou hlavně různé množiny čísel. Jako nejjednodušší příklady nám poslouží množiny přirozených, celých nebo sudých čísel. Trochu překvapivě mezi ně patří i množina racionálních čísel. Nespočetné jsou pak množiny iracionálních, a proto i reálných čísel.

Můžeme si také alespoň trochu představit, co se děje při počítání s nekonečnem. Když do plného hotelu přijede 5 hostů nebo tři odjedou, stále jich bude v hotelu nekonečno, stejně tak, když sestěhujeme hosty dvou nebo pěti hotelů do jednoho. Nejinak tomu bude i po odjezdu poloviny osazenstva. Spočítat ale neumíme zbylé hosty, pokud víme jen, že jich odjelo nekonečno. Mohla jich být polovina, ale taky všichni hosté kromě třech.

Poznámka 3.6. S úvahami o takovém hotelu přišel David Hilbert.

Pojmy ∞ a $-\infty$ budou také potřebné při hledání suprema a infima množin. Ty zobecní naše chápání maxima a minima množin reálných čísel. Největší číslo *(maximum)* množiny reálných čísel M značíme $\max M$. Nejmenší číslo *(minimum)* množiny reálných čísel M značíme $\min M$.

Definice 3.9. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *omezená (ohraničená) shora*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in M$ platí $x \leq k$. Číslo k se nazývá *horní závora množiny* M. Množina, která není omezená shora, se nazývá neomezená shora.

Vyslovíme podobnou definici omezenosti zdola.

Definice 3.10. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *omezená (ohraničená) zdola*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq k$. Číslo k se nazývá *dolní závora množiny* M. Množina, která není omezená zdola, se nazývá *neomezená zdola*.

Definice 3.11. Množina $M \subset \mathbb{R}$, která je omezená shora i zdola, se nazývá *omezená (ohraničená)* Množina, která není omezená, se nazývá *neomezená (neohraničená)*.

Poznámka 3.7. Uvedeme si několik užitečných poznatků:

- Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jsou neomezené shora, neexistuje reálné číslo k, které by bylo větší než všechna jejich čísla. Množiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ jsou neomezené zdola na rozdíl od množiny $\mathbb{N}$.

- Intervaly $\langle a, b\rangle$, $b \in \mathbb{R}$ jsou shora omezené nejen číslem b, ale i každým větším číslem $k > b$.

- Množiny konečného počtu reálných čísel jsou vždy omezené shora, jako číslo k stačí vzít největší číslo, nebo nějaké větší. U nekonečných množin nemusí největší číslo existovat. Množina $M = \{-1, 1, 4, 9, 16\}$ má maximum $\max M = 16$ a minimum $\min M = -1$. Horními závorami jsou čísla z intervalu $\langle 16, \infty)$, dolními závorami jsou čísla z intervalu $(-\infty, -1\rangle$.

- Pokud existuje nějaká horní závora, najdeme celý (shora neomezený) interval závor.

Samozřejmě nejmenší horní a největší dolní závory množiny mají výsadní postavení.

Definice 3.12. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, je neprázdná shora omezená množina reálných čísel. Nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny M se nazývá *supremum* množiny M a značí se $\sup M$. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, je neprázdná zdola omezená množina reálných čísel. Největší prvek množiny všech dolních závor množiny M se nazývá *infimum* množiny M a značí se $\inf M$.

Pro shora neomezené množiny $M \subset \mathbb{R}$ dodefinujeme $\sup M = \infty$ a pro zdola neomezené množiny M dodefinujeme $\inf M = -\infty$.

Poznámka 3.8. Měli bychom vědět:

- Rozdíl mezi maximem a supremem množiny M je, že $\max M$ je číslo z množiny M, supremum do M patřit nemusí.
- Pro intervaly $I = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\sup I = b$, a $\inf I = a$. Otevřené intervaly nemají maxima a minima na rozdíl od intervalů uzavřených.
- Platí $\sup \mathbb{R} = \infty$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$, $\sup \mathbb{Q} = \infty$, $\inf \mathbb{Q} = -\infty$, $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\inf \mathbb{N} = 1$.
- Neprázdné množiny konečného počtu reálných čísel mají supremum i infimum rovno největšímu a nejmenšímu číslu Množina $M = \{-1, 1, 4, 9, 16\}$ má supremum $\sup M = 16$ a infimum $\inf M = -1$.
- U nekonečných množin nemusíme vždy najít minimum nebo maximum, ale infimum nebo supremum najdeme vždy. Množina $M = \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ má maximum i supremum $\max M = \sup M = 1$, ale nenajdeme její nejmenší prvek, zato infimum ano, $\inf M = 0$.

4 | Výrazy

Při derivování, integrování nebo řešení rovnic se budeme vždy setkávat s *výrazy*. Je to matematický zápis, ve kterém figurují součty, součiny podíly, mocniny, … proměnných a čísel.

$$x^2 - z^2,\ \frac{x}{x^2-4},\ 1+\sqrt{x}-5x^6$$

Hlavní nepříjemnost spočívá v tom, že na rozdíl od čísel, kde dostaneme třeba pro součin $4\cdot 5$ číslo 20, pro součin $4\cdot x$ žádný jednodušší výsledek nemáme. Uplatníme tedy hlavně vytýkání či vzorce pro mocniny součtů a rozdílů. Cílem je obvykle zjednodušit košatý zápis, užitečné je také umět převést výrazy na součiny, což uvidíme u rovnic.

U výrazů s proměnnými (to budou skoro všechny) je potřeba určit *definiční obor proměnných*. Obvykle je to množina čísel, pro která má výraz smysl (pak mluvíme o maximálním definičním oboru), popřípadě její podmnožina. Například výraz $\sqrt{x+5}$ má definiční obor $\langle -5,\infty)$. Když do výrazu dosadíme místo proměnné číslo (bod) z definičního oboru, najdeme *hodnotu* výrazu v bodě,

$$V(x) = \frac{x}{x^2-4},\ x\in\mathbb{R}-\{-2,2\},$$

$$V(-3) = \frac{-3}{(-3)^2-4} = \frac{-3}{5}.$$

Definiční obor pak hraje svoji roli při zjišťování rovnosti výrazů. Dva výrazy si jsou rovny, pokud mají stejný definiční obor a jejich hodnoty se pro všechny prvky definičního oboru rovnají. Výrazy

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1},\ x-1$$

se rovnají na definičním oboru $\mathbb{R}-\{1\}$, nebo jakékoliv jeho podmnožině, ale ne na celém $\mathbb{R}$, protože pro číslo 1 není první výraz definován. Definiční obor vynikne u výrazů s absolutní hodnotou. Například k rovnosti výrazů

$$|2x+1| = 2x+1$$

dojde na definičním oboru $\langle -\frac{1}{2},\infty)$ (tam, kde je $2x+1$ kladné nebo 0) a k rovnosti

$$|2x+1| = -(2x+1)$$

dojde na definičním oboru $\langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ (tam, kde je $2x+1$ záporné nebo 0).

Sčítání a násobení výrazů není složité. Upravíme následující výraz díky asociativitě sčítání,

$$(3x^2y-2x+1)+(4x^2y+6x-3)=3x^2y+4x^2y-2x+6x+1-3,$$

pak použijeme distributivitu,

$$=(3+4)x^2y+(-2+6)x-2=7x^2y+4x-2.$$

Při násobení výrazů je často potřeba využít distributivity násobení vzhledem ke sčítání i vícekrát,

$$(3+\sqrt{x})(x+2)=(3+\sqrt{x})x+(3+\sqrt{x})2=3x+x\sqrt{x}+6+2\sqrt{x}.$$

✎ *Cvičení* 4.1. Spočítejte:

1. $(2x+1)^2,\ (x-y+2)^2,\ (3m^2n^5-4mn^4)\cdot 5m^2n-6m^3n^2\cdot(2mn^4-7n^3),$
2. $(3a^3x-2b^2y^4)(3a^3x+2b^2y^4)(9a^6x^2+4b^4y^8).$
   Občas si můžeme, hlavně ve školních úlohách, zjednodušit život, když pro příklad najdeme vhodný vzoreček.

✓ *Řešení.* $4x^2+4x+1,\ x^2+y^2-2xy+4x-4y+4,\ 3m^4n^6+22m^3n^5$✓$(9a^6x^2)^2-(4b^4y^8)^2$

4.1 Polynomy

Polynomy jedné proměnné jsou výrazy tvaru

$$A(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

kde $a_n,\dots a_1, a_0$ jsou reálná čísla. Nejvyšší mocnina n, pro kterou $a_n\neq 0$, se nazývá *stupeň polynomu*. Dva polynomy si jsou rovny, pokud mají stejné koeficienty $a_n,\dots a_1, a_0$ před každou mocninou proměnné. Hodnotu polynomu v bodě b dostaneme dosazením b za proměnnou,

$$P(x)=3x^4-6x+3,$$

$$P(2)=3\cdot 2^4-6\cdot 2+3=39.$$

U polynomů jedné proměnné můžeme najít *kořeny polynomu*. Kořen polynomu je číslo k, pro které platí $A(k)=0$. Například číslo 2 je kořenem polynomu

$$A(x)=x^2-5x+6,$$

protože
$$A(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0.$$

Pro kořen k polynomu A můžeme vždy psát

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - k) \cdot B_{n-1}(x),$$

kde polynom B_{n-1} je stupně o jedna menšího než $A(x)$.

Pokud

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - k)^j \cdot B_{n-j}(x),$$

nazveme k kořenem $j-$násobným.

Kořeny polynomů druhého stupně (kvadratických trojčlenů) se hledají pomocí diskriminantu, nebo pomocí rozkladu na úplné čtverce.

Kořeny k_1, k_2 polynomu $P(x)$ ve tvaru

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

najdeme pomocí vzorce
$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
kde výrazu
$$D = b^2 - 4ac$$
říkáme *diskriminant*. Pokud je diskriminant kladný, dostaneme dva kořeny, pokud nulový, jeden (dvojnásobný), pokud záporný, neexistují reálné kořeny.

Zkusíme najít kořeny polynomu

$$P(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Dosadíme do vzorce
$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1},$$
a obdržíme $k_1 = 2 - \sqrt{2}$, $k_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Poznámka 4.1. Při výpočtu kořenů můžeme koeficienty polynomu podělit koeficientem a_n u nejvyšší mocniny x^n, stačí tak uvažovat tvar

$$x^2 + px + q.$$

Popíšeme si metodu rozkladu polynomu na úplné čtverce Uvědomme si, že náš polynom se liší od
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

jen o $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$, tedy

$$x^2 + px + q - \left(x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Odtud plyne

$$x^2 + px + q = (x+p)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ukažme si to na příkladě:

$$x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 4 - 2 = (x-2)^2 - 2.$$

Odtud pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ snadno získáme kořeny kvadratického trojčlenu,

$$(x-2)^2 - 2 = (x-2)^2 - (\sqrt{2})^2 = \left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right).$$

Dostali jsme tak kořenový rozklad a kořeny $k_1 = 2 - \sqrt{2}$, $k_2 = 2 + \sqrt{2}$. Stejně jako u diskriminantu, pokud je $(\frac{p}{2})^2 - q$ kladné číslo, v našem případě 2, má trojčlen dva kořeny, když 0, existuje jeden dvojnásobný kořen, jinak reálné kořeny neexistují.

✎ *Cvičení* 4.2.

1. Jaký je stupeň polynomu $x^3 - x + 12,\ 2 - 7x^2 + 8x - x^4$?

2. Dosaďte do předchozích polynomů čísla -3,4.

3. Jaký musí být koeficient a_2, aby $P(2) = 0$ pro $P(x) = 3x^3 + a_2x^2 + 2x - 12$?

4. Najděte koeficienty polynomů $P(x)$ a $Q(x)$, aby se rovnaly, $P(x) = a_1x^3 + 3x^2 + 2x + 1,\ Q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. V tom případě bude platit $P(x) = Q(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

✓ *Řešení.* 3, 4✓-12, 72, -166, -332✓$a_2 = -4$✓$a_1 = 0,\ a_2 = 3,\ b_2 = 2,\ c_2 = 1$

✎ *Cvičení* 4.3.

1. Doplňte na úplné čtverce $x^2 - x + 2,\ x^2 - 16x + 18$.

2. Najděte kořeny polynomů $x^2 - 4,\ x^2 + 4,\ x^2 - 8x,\ x^2 + 16x\ x^2 - 4x + 3,\ x^2 - 4x + 4,\ x^2 - 4x + 8$.

3. Zkuste ve vzorci pro výpočet kořenů pomocí diskriminantu

   $$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   nahradit a, b, c koeficienty $1,\ p,\ q$. Je ve výpočtu kořenů těmito metodami nějaký rozdíl?

✓ *Řešení.* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2$, $(x-4)^2-\left(\sqrt{46}\right)^2$✓-2, 2; nemá reálné kořeny; 0, 8; 0, -16; 1, 3; 2, 2; nemá reálné kořeny✓není

Polynomy jedné proměnné můžeme i dělit, hodí se nám to při hledání kořenů nebo před úpravou podílu polynomů na parciální zlomky. Situace je jednodušší, když dělíme jednočlenem

$$(x^3-4x^2+6x-3):(2x).$$

Tady stačí dělit jednotlivé členy dělence,

$$x^3:(2x)-4x^2:(2x)+6x:(2x)-3:(2x)=\frac{x^2}{2}-2x+3-\frac{3}{2x}.$$

Dělení polynomů už nemusí dát polynom, obvykle obdržíme součet polynomu a lomeného výrazu, v jehož čitateli je polynom nižšího stupně než ve jmenovateli.

Budeme dělit

$$(4x^3-5x^2+9x-11):(x^2+2).$$

Začínáme tak, že vydělíme člen dělence s nejvyšší mocninou členem dělitele s nejvyšší mocninou $4x^3:x^2=4x$, podílem vynásobíme dělitele a součin odečteme od dělence. Zbytek po odečtení (tady $-13x^2+9x-11$) znovu dělíme. Takto postupujeme, dokud nám zbývá polynom k dělení se stupněm větším nebo rovným stupni dělitele.

$$\begin{array}{rrrrl}
(4x^3 & -5x^2 & +9x & -11) & :(x^2+2)=4x-13+\frac{35x-11}{x^2+2} \\
-(4x^3 & +8x^2) & & & (=4x\cdot(x^2+2)) \\
\hline
 & -13x^2 & +9x & -11 & \\
 & -(-13x^2 & -26x) & & \\
\hline
 & & 35x & -11 &
\end{array}$$

Postup je analogický k dělení přirozených čísel, jen pracujeme místo x s číslem[1] 10.

$$\begin{array}{rrl}
 & 1291 & :56=20+3+\frac{3}{56} \\
- & 1120 & (20\cdot 56) \\
\hline
 & 171 & \\
- & 168 & \\
\hline
 & 3 &
\end{array}$$

Dělení polynomů používáme, když se nám podaří najít kořen k_1 polynomu $A(x)$. Další kořeny se budou snáze hledat z polynomu $B(x)$ s menším stupněm:

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=(x-k_1)\cdot B(x).$$

[1]základem číselné soustavy

Polynom $x^3-5x^2-4x+20$ má kořen 5. Zkoumaný polynom tak vydělíme kořenovým činitelem odpovídajícím kořenu (kořen 5 $\Rightarrow$ dělíme $(x-5)$):

$$B(x)=\frac{A(x)}{x-k_1}\Rightarrow (x^3-5x^2-4x+20):(x-5)=x^2-4$$

Polynom $B(x)$ má nižší stupeň než $A(x)$, ale stejné kořeny kromě k_1. Proto budou kořeny polynomu x^2-4 tedy -2 a 2 i kořeny polynomu $x^3-5x^2-4x+20$.

Když najdeme kořeny polynomu jedné proměnné, jsme schopni polynom zapsat jako součin

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-k_1)^{n_1}\cdots(x-k_j)^{n_j},$$

kde $k_1,\ldots,k_j$ jsou kořeny a $n_1,\ldots,n_j$ jejich násobnosti. Pokud polynom nemá součet násobností kořenů rovný stupni polynomu, jde aspoň rozložit na součin tvaru

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-k_1)^{n_1}\cdots(x-k_j)^{n_j}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

Poznámka 4.2. Kvadratické trojčleny nahrazují kořenové činitele odpovídající sdruženým komplexním kořenům.

Poznámka 4.3. Kořeny polynomů se někdy podaří odhadnout.

- Pokud se dá z polynomu vytknout proměnná (x), má polynom kořen 0 (x^3-3x^2+6x).
- Součet koeficientů je 0, pak je kořenem číslo jedna (x^3-3x^2+6x-4).
- Součet koeficientů u sudých mocnin je roven součtu koeficientů u lichých mocnin, pak je kořenem -1 ($x^3-3x^2+6x+10$).
- Pokud má polynom koeficient u nejvyšší mocniny 1 $(a_n=1)$, pak je koeficient u druhé nejvyšší mocniny s opačným znaménkem $(-a_{n-1})$ součtem kořenů a absolutní člen (a_0) součinem kořenů braných s opačným znaménkem. Pro kořeny k_1, k_2 kvadratického polynomu

  $$P(x)=x^2+bx+c$$

  platí[2]

  $$\begin{aligned} -b &= k_1+k_2,\\ c &= k_1\cdot k_2. \end{aligned}$$

Cvičení 4.4. Vydělte:

1. $(3x^3+5x^2-x+2):(x+2)$,
2. $(8x^3-10x^2-13x+19):(2x-3)$,

[2] $k_1\cdot k_2=(-k_1)\cdot(-k_2)$

3. $(5x^5+7x^4-20x^3-11x^2+23x-6):(x^2+x-3)$,
4. $(5x^2-2x+1):(x^3-1)$.
5. Podívejte se, jak by se změnilo pořadí operací, a tedy až příliš zjednodušilo počítání, kdybychom v předchozích příkladech odstranili závorky.

✓ *Řešení.* $3x^2-x+1$, $4x^2+x-5+\frac{4}{2x-3}$, $5x^3+2x^2-7x+2$, $(5x^2-2x+1):(x^3-1)$ nejde zjednodušit, čitatel má nižší stupeň než jmenovatel

✎ *Cvičení* 4.5.

1. Polynom $P(x)=x^3-2x^2+6x-5$, má kořen 1, jaké jsou ostatní reálné kořeny?
2. Polynom $P(x)=x^3-2x^2-5x+10$, má kořen 2, jaké jsou ostatní reálné kořeny?
3. Najděte kořeny polynomů $x^4-5x^3+6x^2$, x^3+4x^2-9x+4, x^3+4x^2+5x+2

✓ *Řešení.* žádné✓$-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$✓0, 2, 3;$\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$; -2

Poznámka 4.4. Nepřipadá vám postup rozkladu polynomu na kořenové činitele podobný hledání prvočíselného rozkladu? Nějak nalézt dělitele, vydělit, výsledku najít dělitele, vydělit ...

U rovnic se snažíme často převádět výraz na součin, pro polynomy jedné proměnné to odpovídá nalezení kořenů a kořenových činitelů. U polynomů více proměnných jsme odkázáni hlavně na vytýkání a použití vzorců pro mocniny součtů, rozdílů... Někdy vytkneme jen číslo,

$$5a+10b-15c=5(a+2b-3c),$$

jindy je třeba vytýkat několikrát,

$$x(y-1)+2(1-y)-z(1-y)=-x(1-y)+2(1-y)-z(1-y)=(1-y)(-x+2-z).$$

Často vede k cíli (součinu) rozdělení výrazu na více skupin a vytýkání výrazů jen ve skupině členů,

$$ax-bx+2a-2b=x(a-b)+2(a-b)=(x+2)(a-b).$$

✎ *Cvičení* 4.6. Rozložte na součin:

1. $1-x^2$, $x^2+7x+12$, $2x^2+10x+12$, $9x^3+18x^2-x-2$,
2. $ax-ay+bx-by$, x^4-y^4, $ax^2+2ax-3a$, $xz-yz-x^2+2xy-y^2$ (třeba i pomocí vytýkání).

✓ *Řešení.* $(1-x)(1+x)$, $(x+3)(x+4)$, $2(x+3)(x+2)$, $(3x-1)(3x+1)(x+2)$✓$(a+b)(x-y)$, $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$, $a(x+3)(x-1)$, $(z-x-y)(x-y)$

4.2 Obecné výrazy

Obecnými výrazy budeme mínit hlavně výrazy s více proměnnými, nebo podíly mnohočlenů. Často uplatníme svoje znalosti práce s mocninami. Spočítejme například pro kladná a, b

$$\sqrt{\frac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt{b}}} : \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{b^2}\right)^3.$$

Tento výraz uvažujeme pouze pro kladná reálná čísla, protože proměnné a i b se vyskytují ve jmenovateli a pod odmocninou. Pro usnadnění výpočtu zapíšeme odmocniny jako mocniny

$$\left(\frac{bb^{\frac{1}{3}}}{ab^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{b^2}\right)^3 = \left(a^{-1}b^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}-2}\right)^3 =$$

nyní umocníme zlomky a výraz zapíšeme ve tvaru součinu tak, že převrátíme mocninu druhého výrazu

$$= \left(a^{-1\cdot\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\right)^{-3} = \left(a^{-\frac{1}{2}+1}b^{\frac{5}{12}+\frac{9}{2}}\right) = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{59}{12}}.$$

U lomených výrazů můžeme někdy ke zjednodušení použít krácení. Podobně jako umíme čísla rozložit na součin prvočísel, můžeme také rozložit polynomy na součin kořenových činitelů a stejné činitele ve jmenovateli a čitateli krátit. Vyzkoušíme si to na následujícím výrazu:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

Měli bychom uvést obor proměnné, $x \in \mathbb{R} - \{3, 4\}$. Na tomto oboru se původní výraz rovná zjednodušenému, protože pro číslo 3 nemá původní výraz smysl. Obor se obvykle nezapisuje, pokud je $\mathbb{R}$ (původní i upravený výraz se shodují pro všechna reálná čísla) nebo pokud mají oba tyto výrazy stejný maximální definiční obor.

Cvičení 4.7. Zjednodušte a najděte definiční obor proměnné:

1. $$\frac{2x^2+6x-8}{8-4x-4x^2},\ \frac{b^2-9}{b^2-3b},\ \frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2},$$

2. $$\frac{2}{x+2}+\frac{x}{x+2},\ 1-\frac{p^2}{p^2-1},\ \frac{1}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x^2-9},$$

3. $$\frac{\frac{x+4}{x}}{x-\frac{16}{x}},\ \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-2x^2-3x},$$

4.
$$\frac{a-2b}{a+b}-\frac{2a-b}{b-a}+\frac{2a^2}{b^2-a^2},$$

5.
$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{2a-2b},\ \frac{3a+3b}{4a-4b}\cdot\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2},$$

6.
$$\frac{\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}.$$

✓ *Řešení.* $-\frac{x+4}{2(x+2)}$, $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$; $\frac{b+3}{b}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,3\}$; $\frac{3x+2}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}-\{-2,\frac{1}{2}\}$✓$1$, $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$; $-\frac{1}{p^2-1}$; $\frac{2x-4}{(x-1)(x+3)(x-3)}$✓$\frac{1}{x-4}$, $x\in\mathbb{R}-\{-4,0,4\}$; $\frac{x-1}{x}$, $x\notin\{-1,0,3\}$,✓$\frac{3b-a}{b+a}$, $a\neq\pm b$✓$\frac{a-b}{2(a+b)}$, $a\neq b$; $\frac{3}{4}$, $a\neq\pm b$, ✓-1, $a\neq\pm b$,

✎ *Cvičení* 4.8. Zjednodušte a najděte obor proměnné:

1.
$$\left(\frac{b^3}{a^4b^{-1}c^2}\right)^{-4}:\left(\frac{a^2b^{-3}}{a^{-4}c^2}\right)^{-2},$$

2.
$$\left(\frac{7a^2}{3b^3}\cdot\frac{c}{2a^3b}\right):\left(\frac{3a^2}{2b^2c^2}\cdot\frac{14c^3}{9a^3b^3}\right),$$

3.
$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}},$$

4.
$$\frac{\sqrt{(x-2)}}{\sqrt{x^2-4x+4}}.$$

✓ *Řešení.* $a^{28}c^4b^{-22}$, $a,b,c\neq 0$,✓$\frac{b}{2}$, $a,b,c\neq 0$ ✓$a^{\frac{15}{16}}$, $a\geq 0$✓$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

✎ *Cvičení* 4.9. Zjednodušte pomocí vytýkání a najděte obor proměnné:

1.
$$\frac{ac+bc+ad+bd}{ac+bc+ad-bd},$$

2.
$$\left(\frac{a+3b}{12ac-4bc}\cdot\frac{4b^2-36a^2}{3b-a}\right):\frac{6a+2b}{2ac-6bc},$$

3.
$$\left(\frac{p\sqrt{p}+q\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\sqrt{pq}\right)\cdot(p-q)+\sqrt{2\sqrt{q}}\sqrt{p}+\sqrt{q}.$$

✓ *Řešení.* $\frac{a+b}{a-b}$, $c+d\neq 0$✓$b+3a$, $b\neq 3a$, $a\neq 3b$, $a\neq -3b$, $c\neq 0$✓1, $p\neq q$, $p,q>0$,

5 | Funkce

5.1 Základní pojmy

Data, se kterými se setkáváme v ekonomii, fyzice nebo matematice, se často objevují ve dvojicích. Spolu s cenou akcie je důležitý i čas, kdy se na cenu dostala. Mezičasy při bězích mají smysl jen se vzdáleností, nebo výkazy tržeb potřebují kromě částky i datum.

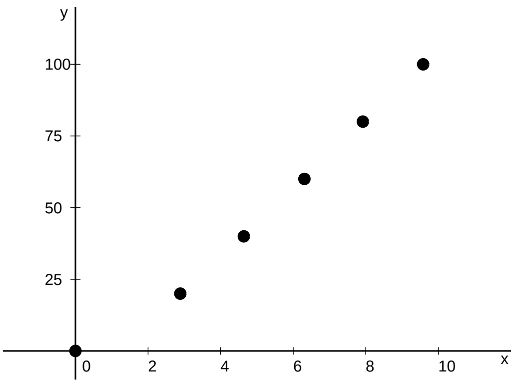
Pokud pro neprázdnou množinu uspořádaných dvojic reálných čísel platí, že žádné dvě dvojice nemají stejné první číslo, říkáme této množině *funkce*. Výše uvedené příklady funkcemi jsou, protože nejde mít za jeden den dvoje různé tržby, nebo v jednu chvíli dvě různé ceny akcie, ani běžec nemůže být na jednom místě ve dvou různých mezičasech.

Dvojice obvykle značíme pomocí proměnných (x, y) nebo $(x, f(x))$. Dvojic dat může ale být tolik, že jsou nepřehledná, nebo nekonečně mnoho, takže nejdou vypsat. Znázorňujeme je pak *grafem* a někdy i pomocí *předpisu*. Hlavně v matematice a fyzice se funkce vyskytují jako zobrazení popsatelná pomocí předpisu.

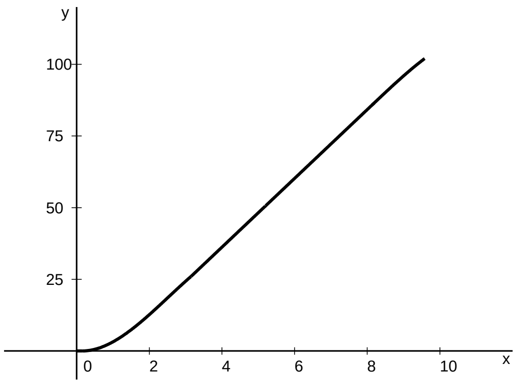
Před vytvořením grafu musíme nejdříve v rovině zvolit soustavu souřadnic. To znamená na papíře nakreslit dvě obvykle na sebe osy a na každé zvolit jednotku. Pak vyneseme body se souřadnicemi $[x, y]$ pro všechny dvojice (x, y). Množinu všech těchto bodů nazýváme graf funkce. Graf je podmnožinou $\mathbb{R}^2$. Například jsme schopni vypsat sprinterem uběhnutou vzdálenost v několika mezičasech, ale ne pro všechny časy, pro ty můžeme pouze nakreslit graf.

x	0	2,89	4,64	6,31	7,92	9,58
y	0	20	40	60	80	100

Poloha sprintera v mezičasech



Poloha sprintera na trati v mezičasech



Poloha sprintera na trati během celého závodu

Definice 5.1. Zobrazení f množiny $M \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce jedné reálné proměnné*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f, značí se D_f, množina $f(M) = \{f(x), x \in M\}$ se nazývá *obor hodnot* funkce f, značí se H_f.

Uvedeme i přesnou definici grafu.

Definice 5.2. *Grafem* funkce $y = f(x)$ nazveme množinu všech bodů $(x, f(x))$ v rovině $\mathbb{R}^2$, kde $x \in D_f$, značíme G_f,

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in D_f, y = f(x)\}.$$

Už jsme viděli jak funkci zadat pomocí tabulky nebo grafu, v dalším textu budeme používat nejvíce analytické vyjádření pomocí funkčního předpisu,

$$f : D_f \to \mathbb{R},$$

$$y = f(x).$$

Budeme psát

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

Tímto způsobem si zapíšeme první čísla dvojic do jedné množiny a předpis bude návod, jak získat ke každému takovému číslu to druhé z dvojice.

Poznámka 5.1. Definiční obor funkce neuvádíme, jen když je roven množině všech reálných čísel, pro která má předpis funkce smysl. Této množině budeme říkat *maximální definiční obor funkce*. D_f a H_f mohou být jakoukoliv podmnožinou $\mathbb{R}$.

Setkáme se i s předpisy složenými z několika předpisů pro podmnožiny definičního oboru, třeba

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in (-\infty, 0), \\ 0 & x = 0, \\ 1 + x & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Vhodným příkladem je i funkce sgn(x),

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0), \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Abychom víc zdůraznili důležitost definičního oboru, zkusíme analyticky popsat funkci $\{[0,0], [1,1]\}$. Tuto funkci můžeme pomocí předpisu zapsat mnoha způsoby

$$f : \{0,1\} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x),$$

$$g : \{0,1\} \to \mathbb{R},$$

$$g(x) = x,$$

$$h : \{0,1\} \to \mathbb{R},$$

$$h(x) = x^a, \text{ pro jakékoliv } a > 0,$$

$$u : \{0,1\} \to \mathbb{R},$$

$$u(z) = 2^z - 1.$$

Jen definiční obor dané funkce musí být pro všechny její zápisy stejný, na rozdíl od názvů proměnných i předpisů.

Definice 5.3. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ se rovnají, pokud mají stejné definiční obory a jejich hodnoty jsou si rovny pro každé x z definičního oboru. Můžeme tedy zapsat

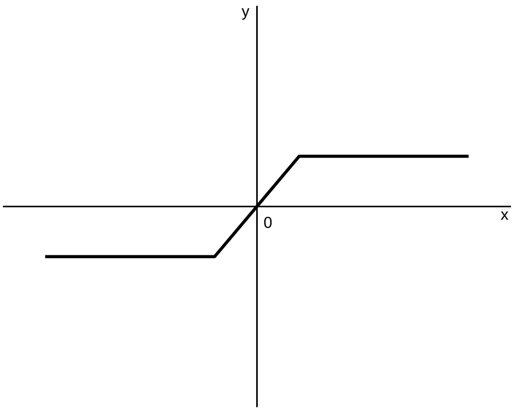
$$f = g \Leftrightarrow (D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f : f(x) = g(x)).$$

✎ *Cvičení* 5.1. Jsou následující množiny funkce?

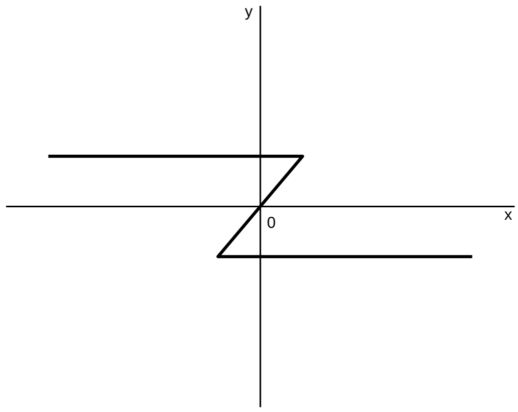
1. $M_1 = \{(0,2), (-2,0), (4,0), (2,2), (-2,2)\}$,
2. $M_2 = \{(1,1), (2,3), (3,1), (0,1), (-2,3)\}$,
3. $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x - 1\}$,
4. $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = x\}$,
5. $M_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^3 = x\}$.

✓ *Řešení.* M_1 a M_4 nejsou funkce, stačí sledovat, jestli se pro nějaké x z definičního oboru nevyskytuje více obrazů.

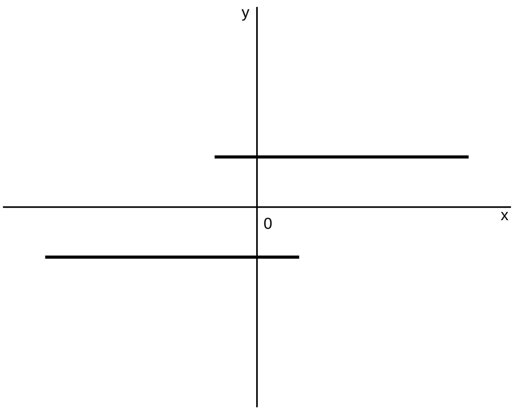
✎ *Cvičení* 5.2. Jsou množiny $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ grafy funkcí?



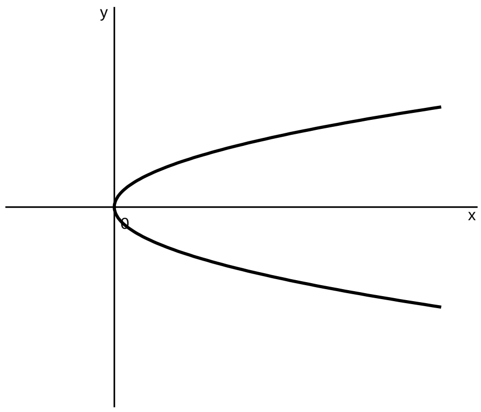
Množina A_1



Množina A_2



Množina A_3



Množina A_4

Obrázek 5.1: Které z množin jsou funkce?

✓ *Řešení.* Pouze množina A_1 je funkce, všechny ostatní grafy znázorňují pro některá x dvě hodnoty y. Jinak řečeno, každá svislá přímka smí protínat graf funkce pouze jednou.

✎ *Cvičení* 5.3. Určete maximální definiční obor funkcí $f(x) = 154353x - 45677,\ f(x) = \frac{x^2}{1+x},\ f(x) = \sqrt{3x - x^3}$.

✓ *Řešení.* $\mathbb{R}$✓$\mathbb{R} - \{-1\}$✓$(-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle$

✎ *Cvičení* 5.4. Určete obor hodnot funkce $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ s předpisem

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

3. $f(x) = a + (b - a)x$,

4. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$.

✓ *Řešení.* $(0, 1)$✓$(1, \infty)$✓(a, b)✓$\mathbb{R} - (0, 1)$

✎ *Cvičení* 5.5. Jaká funkce popisuje závislost obvodu kružnice na jejím poloměru?

✓ *Řešení.* $o : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, $o(r) = 2\pi r$.

✎ *Cvičení* 5.6. Načrtněte grafy následujících funkcí,

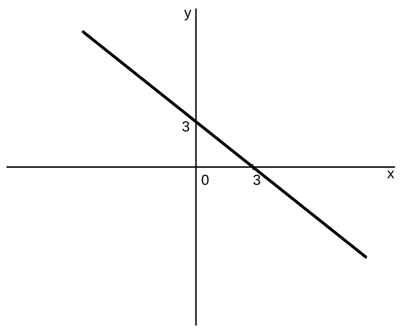
1. $f(x) = 3 - x$,

2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$,

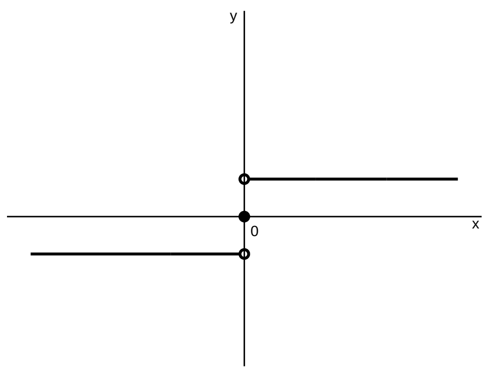
3. $f(x) = x^2$,

4. $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{Z}$.

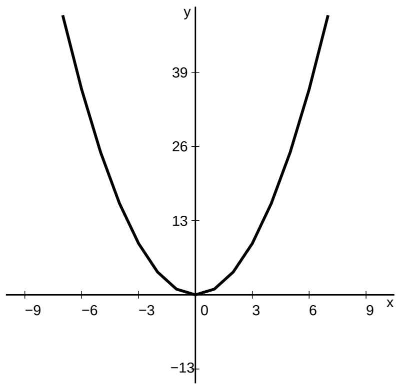
✓ *Řešení.*



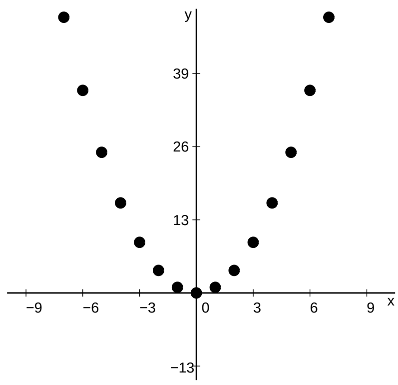
Funkce $f(x) = 3 - x$



Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$



Funkce $f(x) = x^2$



Funkce $f(x) = x^2,\ D_f = \mathbb{Z}$

Připomeneme si nejdříve práci s jednoduchými (elementárními) funkcemi a pak budeme zkoumat složitější funkce z nich utvořené.

Definice 5.4. Jsou-li dány funkce $f(x)$ a $g(x)$ takové, že $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, můžeme z nich vytvořit na $M = D_f \cap D_g$ další funkce pomocí algebraických operací,

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)},\ |f(x)|.$$

U podílu funkcí předpokládáme, že $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$. Například pro funkce $f(x) = x-3,\ g(x) = x^2$ dostaneme

$$f(x)+g(x) = x-3+x^2,\ f(x)-g(x) = x-3-x^2,\ f(x)\cdot g(x) = (x-3)\cdot x^2,$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{x-3}, D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R}-\{3\},\ |f(x)| = |x-3|.$$

5.2 Vlastnosti funkce

Definice 5.5. Funkce f je *omezená shora (zdola)* na $M \subset D_f$, existuje-li číslo k větší (menší) než všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro body $x \in M$.

$$f(x) \text{ je omezená shora na } M \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in M : f(x) < k,$$

$$f(x) \text{ je omezená zdola na } M \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in M : f(x) > k.$$

Pokud je funkce omezená shora i zdola, říká se o ní, že je *omezená*.

$$f(x) \text{ je omezená na } M \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in M : |f(x)| < k.$$

Pokud není funkce omezená shora, je shora *neomezená*.

Funkce $f(x) = x^2$ je zdola omezená. Například pro $k = -1$ platí

$$x^2 > -1, x \in \mathbb{R}.$$

Nenajdeme už ale takové k, aby platilo $x^2 < k, \forall x \in \mathbb{R}$, proto je funkce neomezená shora.

Poznámka 5.2. Funkce f je omezená, pokud je obor jejích hodnot H_f omezená množina.

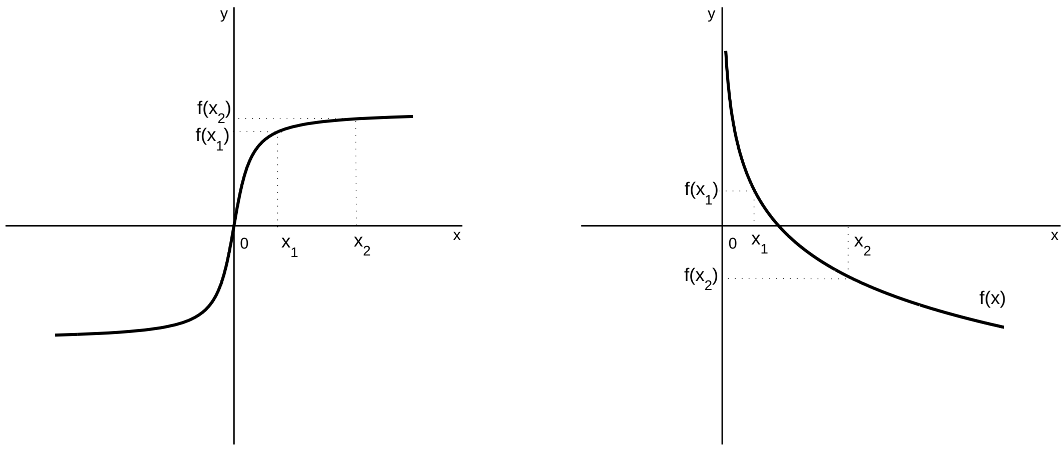
Definice 5.6. Nechť pro funkci $f(x)$ platí na $M \subset D_f$, že pro každé $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$ a

$f(x_1) < f(x_2)$, pak se $f(x)$ nazývá *rostoucí* na M,

$f(x_1) > f(x_2)$, pak se $f(x)$ nazývá *klesající* na M,

$f(x_1) \leq f(x_2)$, pak se $f(x)$ nazývá *neklesající* na M,

$f(x_1) \geq f(x_2)$, pak se $f(x)$ nazývá *nerostoucí* na M.

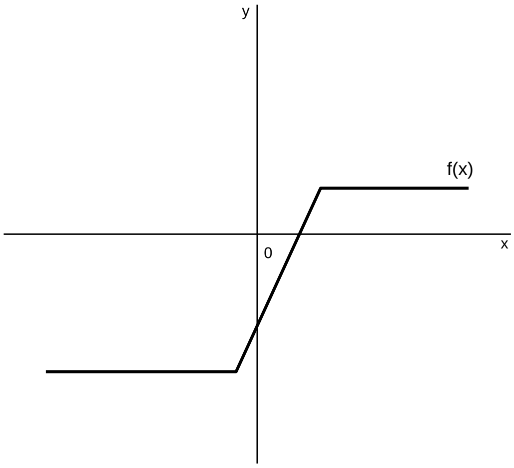


Rostoucí funkce na celém definičním oboru — Klesající funkce na celém definičním oboru

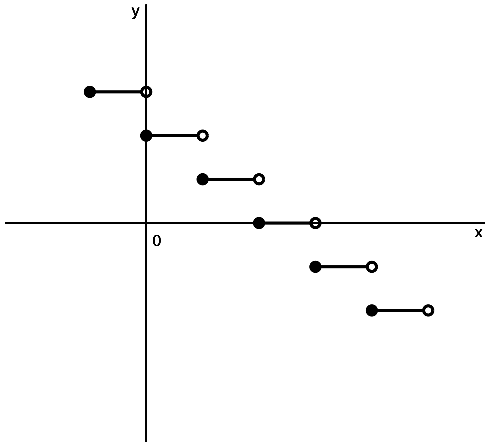
Obrázek 5.2: Monotonní funkce

Poznámka 5.3. Všimněte si, že:

- M obvykle označuje interval.
- Rostoucí a klesající funkce (na celém definičním oboru) jsou prosté ($f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).



Neklesající funkce



Nerostoucí funkce

Obrázek 5.3: Monotonní funkce

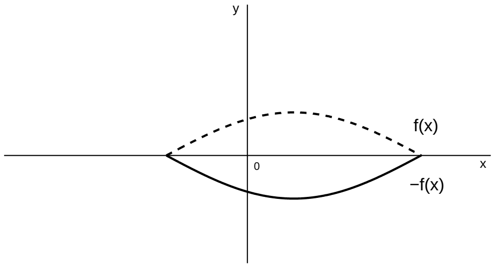
- Pokud je funkce rostoucí, je i neklesající ($f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$).

- Pokud funkce není rostoucí, nemusí být nutně klesající nebo nerostoucí. Funkce $f(x) = x^2$ není rostoucí ani klesající na $\mathbb{R}$. Naproti tomu roste na intervalu $M_1 = \langle 0, \infty)$ a klesá na intervalu $M_2 = (-\infty, 0\rangle$.

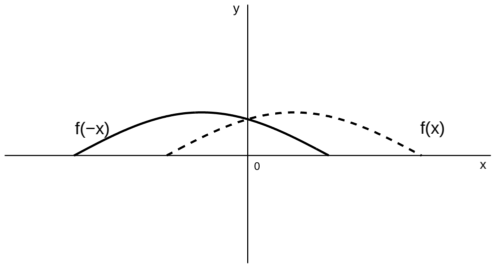
5.3 Transformace grafu

V následující kapitole si připomeneme elementární funkce a jejich grafy. Budeme pak schopni téměř bezpracně kreslit i grafy mnoha složitějších funkcí. Naučíme se proto pravidla pro transformace grafů funkcí. Vycházíme z grafu funkce f a zjistíme, co se stane s grafy některých odvozených funkcí:

- $f_1(x) = -f(x)$
  Každá funkční hodnota bude mít opačné znaménko, bod grafu, který se nacházel nad osou x, bude stejně daleko pod ní. Proto se graf převrátí okolo osy x. Průsečíky grafu funkce f s osou x budou zároveň i body grafu funkce f_1, což nám zjednoduší její kreslení.



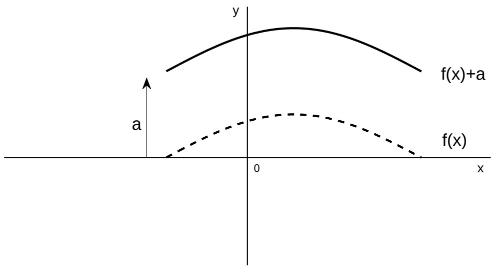
Obrácení grafu funkce kolem osy x



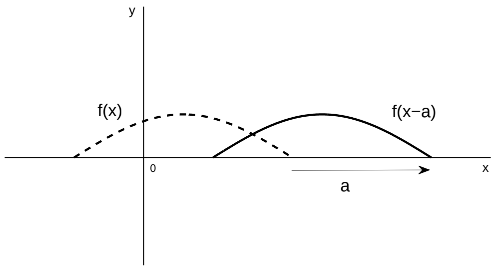
Obrácení grafu funkce kolem osy y

- ☛ $f_2(x) = f(-x)$
  Funkční hodnoty f a f_2 budou stejné pro x s opačným znaménkem, bod grafu funkce f, který se nacházel napravo od osy y, bude od ní u funkce f_2 stejně daleko, ale nalevo. Proto se graf převrátí okolo osy y. Průsečíky grafu funkce f s osou y budou zároveň i body grafu f_2.

- ☛ $f_3(x) = f(x) + b$
  Hodnoty funkce f_3 budou o b výš než hodnoty f pro všechna $x \in D_f$. Proto se graf funkce posune o b nahoru.



Posunutí funkce vertikálně



Posunutí funkce horizontálně

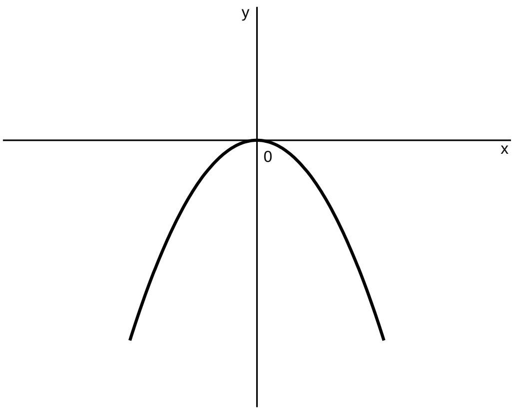
- ☛ $f_4(x) = f(x - a)$
  Funkce f_4 je „opožděná” oproti f o a. Každá funkční hodnota funkce $f_4(x)$ nastala u f už pro $x - a$. Graf f_4 kreslíme o a později než f, tedy posunutý o a doprava.

✎ *Cvičení* 5.7. Jak budou vypadat grafy funkcí:

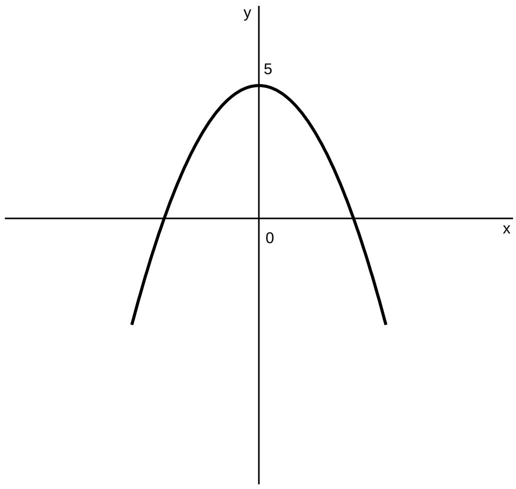
1. $f(x) = -x^2$,
2. $f(x) = -x^2 + 5$,
3. $f(x) = (x - 3)^2$,

4. $f(x) = -(x-3)^2 + 5$?

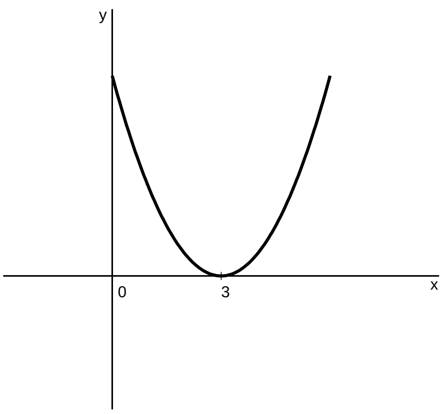
✓ *Řešení.*



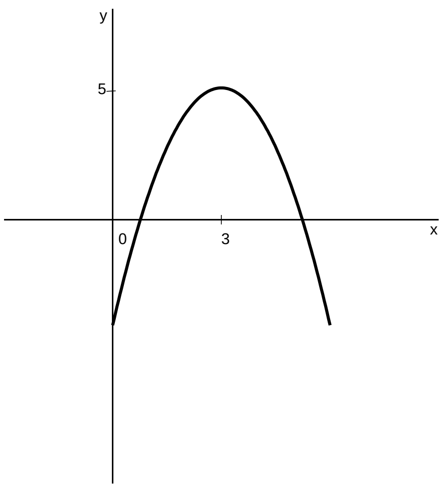
Funkce $f(x) = -x^2$



Funkce $f(x) = -x^2 + 5$



Funkce $f(x) = (x-3)^2$



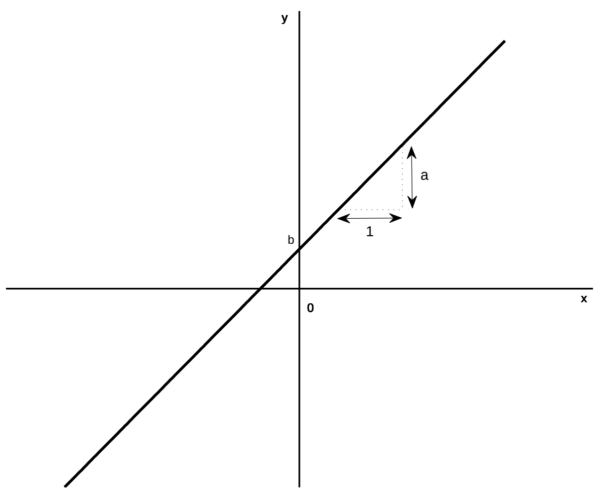
Funkce $f(x) = -(x-3)^2 + 5$

6 | Elementární funkce

Nyní si připomeneme elementární funkce, jejich grafy a vlastnosti. Elementární funkce si musíme dokonale osvojit, protože od této chvíle budeme všechny operace a výpočty s jakkoli komplikovanými funkcemi převádět na operace a výpočty s funkcemi elementárními.

Elementární funkce mají často jeden nebo několik významných bodů, kterými procházejí. Užitečné také bude všímat si, zda je funkce omezená, rostoucí nebo klesající, popřípadě na jakých intervalech. Velmi důležitým se ukáže, jestli se dá graf funkce nakreslit jedním tahem tužky, tedy jestli je funkce spojitá. U elementárních funkcí bude k nespojitostem docházet, jen když bude „díra" v definičním oboru, například funkce $f(x) = \frac{5}{x}$ má definiční obor $\mathbb{R} - \{0\}$, a tak je nespojitá v 0.

6.1 Lineární funkce



Obrázek 6.1: Lineární funkce $f(x) = ax + b$ a její směrnice

Lineární funkce (Obrázek 6.1) je nejjednodušší funkce, ale najdeme pro ni uplatnění. Zapisujeme pro $a, b \in \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

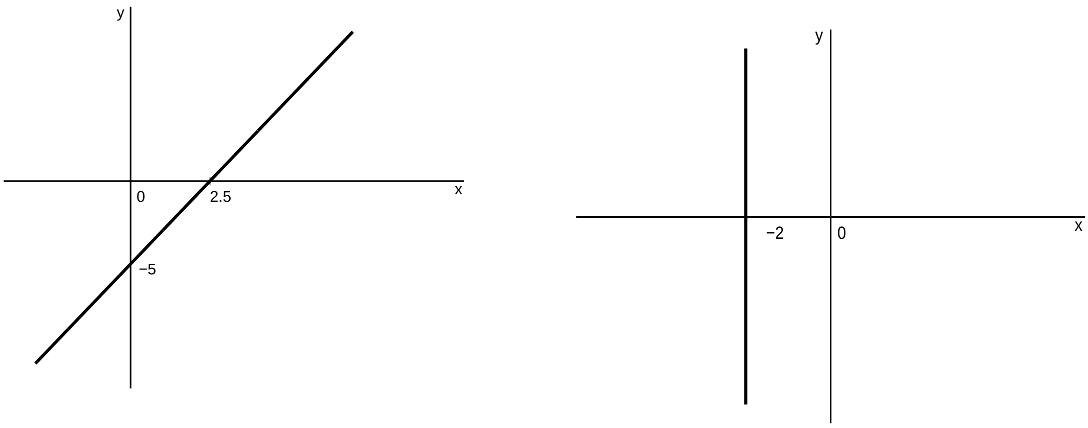
$$f : y = ax + b.$$

Ze zápisu vidíme definiční obor $D_f = \mathbb{R}$. Pokud $b = 0$, říkáme této funkci $(f(x) = ax)$ *přímá úměrnost*. Lineárně s časem roste ujetá vzdálenost při stálé rychlosti. Obvod kružnice je zase lineárně závislý na jejím poloměru.

Když $a = 0$, jedná se o konstantní funkci $f(x) = b$. Jedině v tomto případě je obor hodnot jednoprvková množina $H_f = \{b\}$. Číslu a se říká *směrnice*, o které budeme ještě mockrát mluvit v souvislosti s derivacemi a asymptotami. Pomocí lineárních funkcí popíšeme všechny přímky v rovině kromě těch svislých. Svislé přímky se dají zapsat jako množiny $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = c\}$. Body svislé přímky se liší jen $y-$ovými souřadnicemi, $x-$ová se nemění $(x = c)$. Většinou používáme jen $x = c$.

✎ *Cvičení* 6.1. Nakreslete graf funkce $f(x) = 2x - 5$. Jaké jsou hodnoty funkce f v bodech 2 a -5? Ve kterých bodech má funkce f hodnoty 1 a -8?

✓ *Řešení.* Hodnoty jsou -1 a -15. Uvedené hodnoty nastanou v bodech 3 a $-\frac{3}{2}$



Funkce $f(x) = 2x - 5$ Přímka $x = -2$

Obrázek 6.2: Grafy přímek

Velmi často se setkáváme s problémy, kdy známe hodnoty funkce v bodě, ale neznáme některé parametry funkce. Budeme mít funkci $f(x) = ax + 2$, která prochází bodem $[-5, 12]$. Nejdříve dosadíme -5 za x, funkční hodnota v -5 je 12, tedy $f(-5) = 12$. Dostaneme

$$12 = -5a + 2$$

a vidíme, že $a = -2$. Nalezli jsme funkci

$$f(x) = -2x + 2.$$

Podobně řešíme případ, kdy graf neznámé lineární funkce prochází dvěma body, třeba $[1, -2]$ a $[5, 6]$. Platí tedy $f(1) = -2,\ f(5) = 6$, odkud dosazením do předpisu lineární funkce dostaneme dvě rovnice,

$$\begin{array}{rcl} -2 & = & a + b \\ 6 & = & 5a + b \end{array}$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme

$$8 = 4a.$$

Odtud plyne $a = 2,\ b = -4$. Dostáváme funkci

$$f(x) = 2x - 4.$$

✎ *Cvičení* 6.2.

1. Najděte lineární funkce s grafem procházejícím body $[1, 2]$, $[3, 2]$, a $[0, 1]$, $[1, 0]$ v druhém případě.

2. Najděte pro nalezené funkce průsečíky s osami x a y.

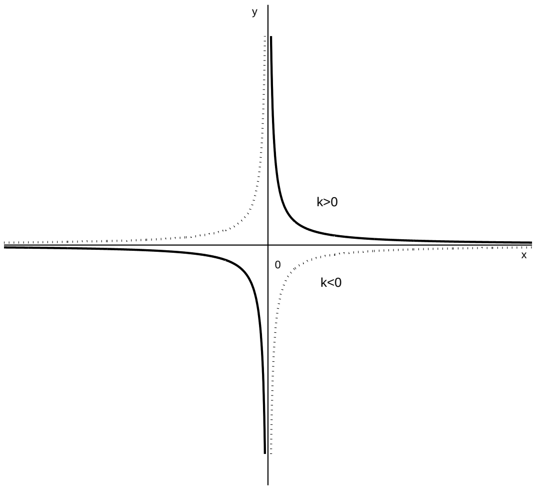
✓ *Řešení.*

1. $f(x) = 2,\ f(x) = -x + 1$

2. Uvědomme si, že průsečík grafu s osou x musí mít $y-$souřadnici 0 a podobně průsečík s osou y $x-$souřadnici 0. Tedy $f(x) = 2$ má jen průsečík s osou y v $[0, 2]$. Body $[1, 0]$, $[0, 1]$ jsou průsečíky $f(x) = -x + 1$ s osami x, y.

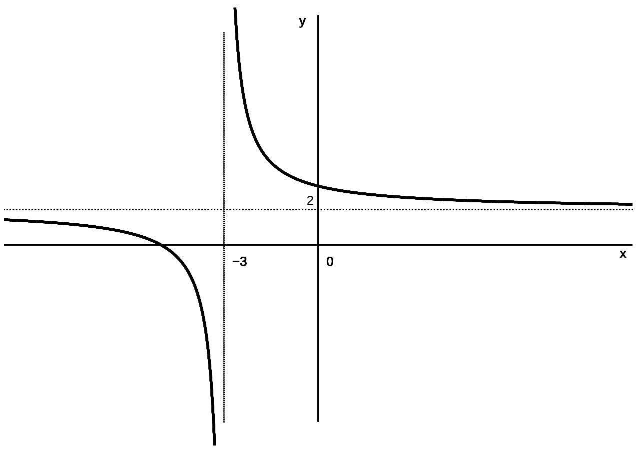
6.2 Lineární lomená funkce

Než si nadefinujeme lineární lomenou funkci, připomeňme si *nepřímou úměrnost*. Nepřímou úměrnost (Obrázek 6.3) popisuje funkce $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{k}{x}$.



Obrázek 6.3: Funkce $f(x) = \frac{k}{x}$

Pokud dojíždíme vždy stejnou cestou do školy, tak čím rychleji pojedeme, tím dřív ve škole budeme. Doba jízdy je tak nepřímo úměrná rychlosti.



Obrázek 6.4: Lineární lomená funkce $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

Lineární lomená funkce (Obrázek 6.4) je jen posunutá nepřímá úměrnost. Budeme psát

$$f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{R},$$

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, bc - ad \neq 0.$$

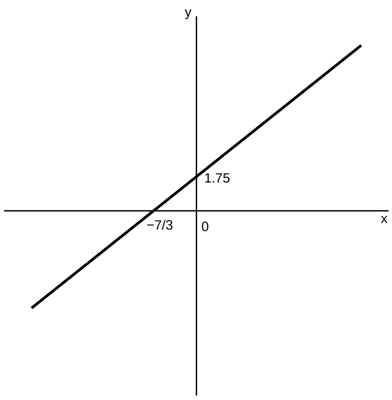
Definiční obor lineární lomené funkce neobsahuje $-\frac{d}{c}$. V tomto bodě dochází k nespojitosti.

Poznámka 6.1. Na funkci vidíme, proč se při kreslení grafů funkcí nemůžeme spolehnout na bezmyšlenkovité spojování několika vynesených bodů. Stačí ovšem nespojovat body, které leží na opačných stranách od bodu nespojitosti.

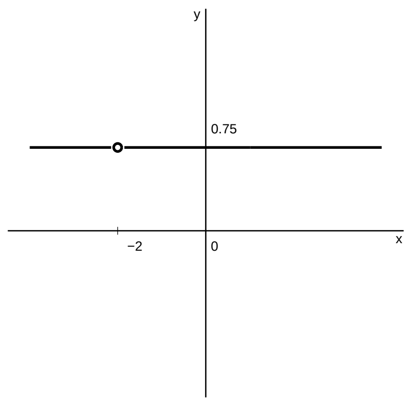
✎ *Cvičení* 6.3. Co by nastalo pro $c = 0, bc - ad = 0$, jak by pak funkce a její graf vypadaly? Zkuste například předpisy

$$f(x) = \frac{3x+7}{4}, \ f(x) = \frac{3x+6}{4x+8}.$$

✓ *Řešení.* Dostali bychom lineární funkce $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ a $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}$.



Funkce $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$



Funkce $f(x) = \frac{3}{4}, D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Obrázek 6.5: Pro některé kombinace koeficientů dostaneme lineární funkci.

Pro snadnější znázornění si převedeme předpis funkce na tvar

$$y = \frac{k}{x-l} + q.$$

Dosáhneme toho vydělením čitatele jmenovatelem. Graf pak snadno nakreslíme posunutím (o l horizontálně, o q svisle) grafu funkce $f(x) = \frac{k}{x}$, kterou při pouhém náčrtu pro $k > 0$ těžko odlišíme od $f(x) = \frac{1}{x}$ (stejně jako $f(x) = \frac{k}{x}$ od $f(x) = -\frac{1}{x}$ pro $k < 0$).

Například funkci $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ převedeme vydělením na tvar $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$.

Podobně jako se ramena nepřímé úměrnosti přimykala k osám x a y (přímkám $y = 0$ a $x = 0$), ramena lineární lomené funkce se přimykají ke svislé a vodorovné přímce.

Těmto přímkám budeme říkat asymptoty. Funkce $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ má asymptoty $y = 2$ a $x = -3$. Ty odpovídají nalezeným hodnotám $q = 2$ a $l = -3$.

Všimněme si, že pro $k > 0$ funkce $f(x) = \frac{k}{x}$ klesá zvlášť na intervalu $(-\infty, 0)$ a zvlášť na $(0, \infty)$.

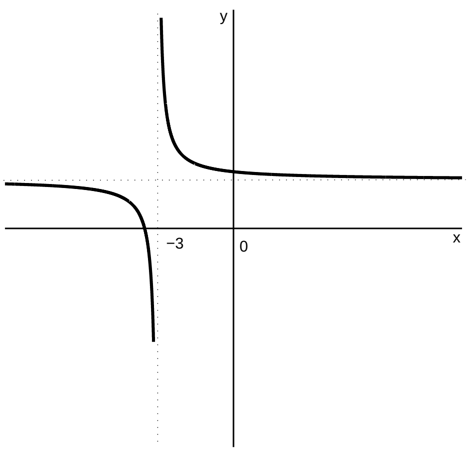
✎ *Cvičení* 6.4.

1. Najděte $k \in \mathbb{R}$, pro které graf funkce $f(x) = \frac{k}{x}$ prochází bodem $[-3, 6]$.

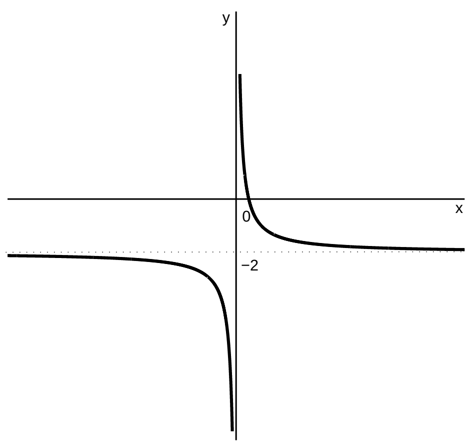
2. Pomocí transformací grafu načrtněte grafy funkcí

$$f(x) = \frac{1}{x+3} + 2, \ f(x) = \frac{1-2x}{x}, \ f(x) = \frac{3x-5}{x-2}, \ f(x) = \frac{6x+5}{2x+3}.$$

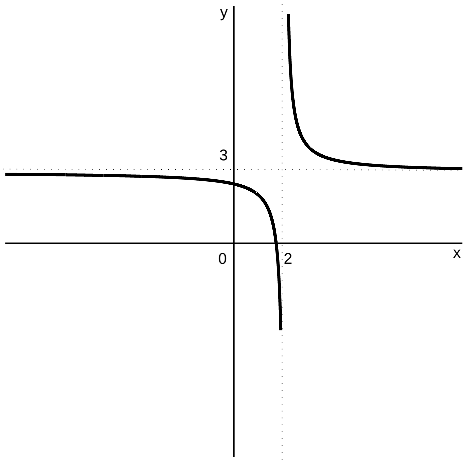
✓ *Řešení.* $k = -18$ ✓ $\frac{6x+5}{2x+3} = 3 + \frac{-4}{2x+3} = 3 + \frac{-2}{x+1.5}$



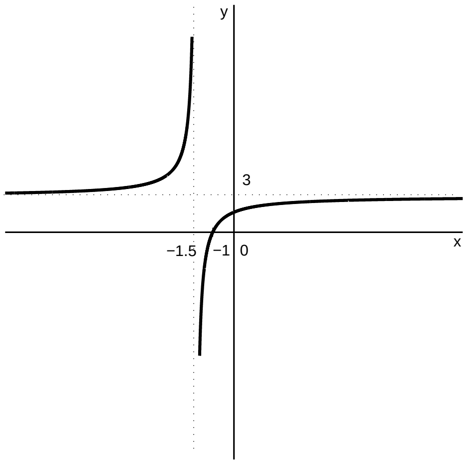
Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x+3} + 2$



Graf funkce $f(x) = \frac{1-2x}{x}$



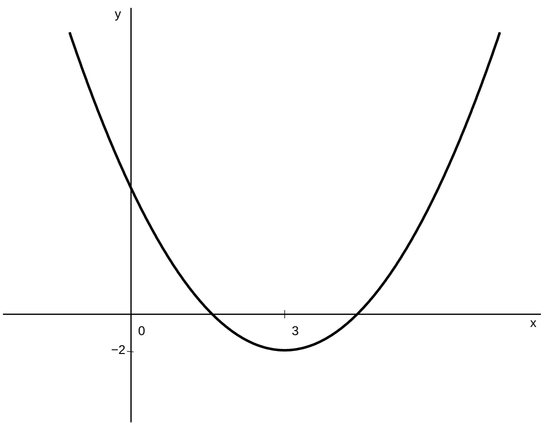
Graf funkce $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$



Graf funkce $f(x) = \frac{6x+5}{2x+3}$

6.3 Kvadratická funkce

Práce s kvadratickou funkcí nebude obtížná. Věnovali jsme se kvadratickým polynomům, což by nám nyní mělo ulehčit práci. Například kořen kvadratického polynomu bude mít význam průsečíku odpovídající kvadratické funkce s osou x.

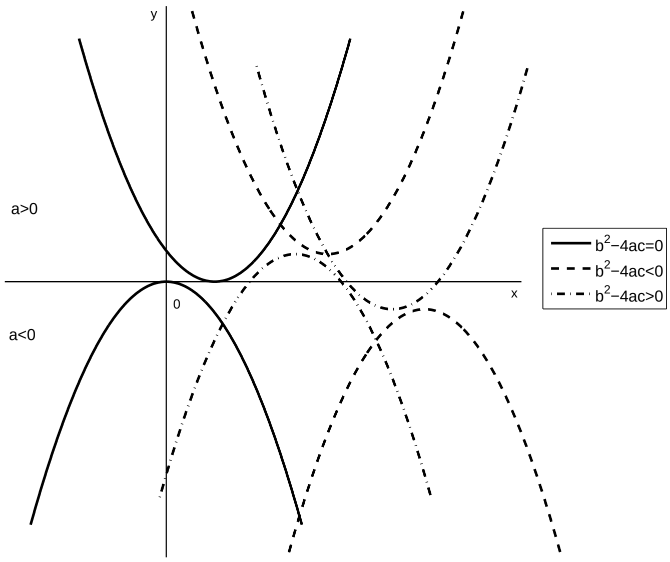


Obrázek 6.6: Příklad kvadratické funkce $f(x) = (x-3)^2 - 2$

Kvadratickou funkci (Obrázek 6.6) zapíšeme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f : y = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



Obrázek 6.7: Jak koeficienty kvadratické funkce ovlivní její polohu

Poznámka 6.2. Pro kladné koeficienty a je kvadratická funkce omezená zdola a má minimum (Obrázek 6.7). Naopak maximum najdeme u grafu kvadratických funkcí se záporným a.

Dřív bylo možné se setkat se šablonou pro kreslení $y = x^2$, $y = 2x^2, \ldots$ Stačila pak i pro ostatní kvadratické funkce se stejnými a, protože jsme schopni si předpisy kvadratických funkcí převést na tvar vhodnější pro náčrt pomocí metody úplných čtverců. Znovu budeme jen posunovat grafy jednoduchých funkcí, protože

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Pro nakreslení grafu $x^2 + bx + c$ stačí posunout graf x^2 o $\frac{b}{2}$ doleva a $c - \frac{b^2}{4}$ nahoru.

✎ *Cvičení* 6.5.

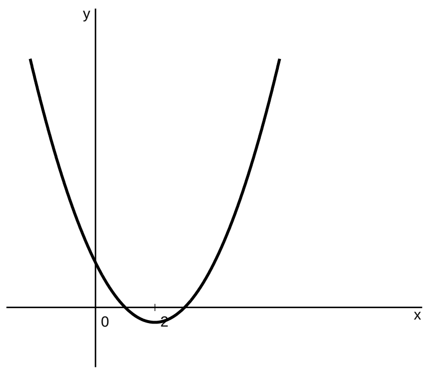
1. Pro jaká b a c protíná funkce $f(x) = x^2 + bx + c$ osu x, co to znamená pro kořeny polynomu $x^2 + bx + c$?

2. Načrtněte grafy funkcí

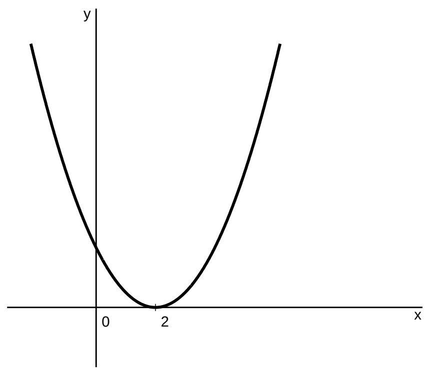
$$f(x) = x^2 - 4x + 3,\ f(x) = x^2 - 4x + 4,\ f(x) = x^2 - 4x + 5,$$

$$f(x) = -(x^2 - 4x + 4),\ f(x) = -x^2 + 5x - 6,\ f(x) = -x^2 - 2x - 3.$$

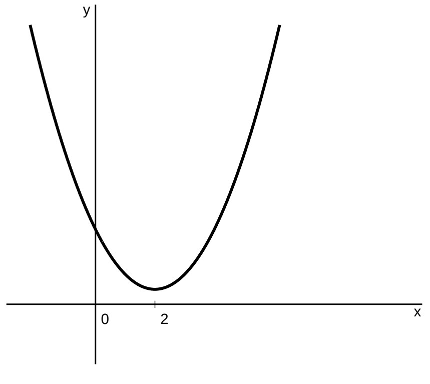
✓ *Řešení.* Graf $f(x) = x^2 + bx + c$ protíná osu x v bodech $[x_1, 0]$ a $[x_2, 0]$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$ pro b, c splňující $b^2 - 4c \geq 0$.



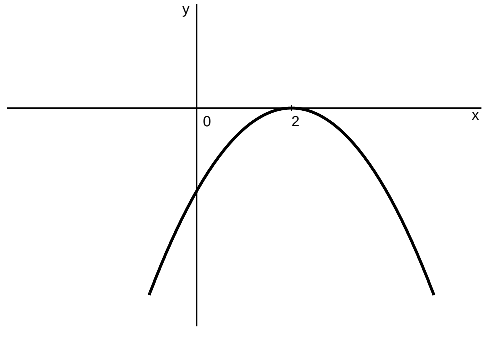
Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$



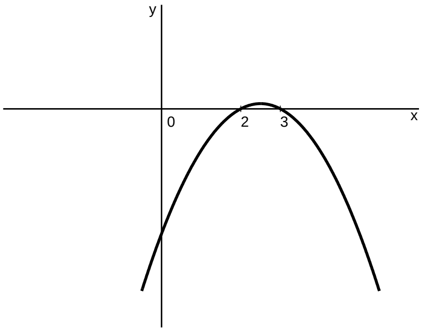
Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 4$



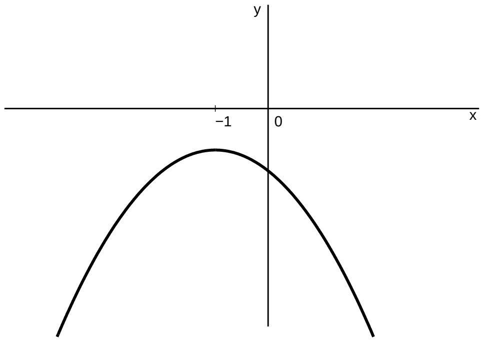
Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 5$



Graf funkce $f(x) = -(x^2 - 4x + 4)$



Graf funkce $f(x) = -x^2 + 5x - 6$



Graf funkce $f(x) = -x^2 - 2x - 3$

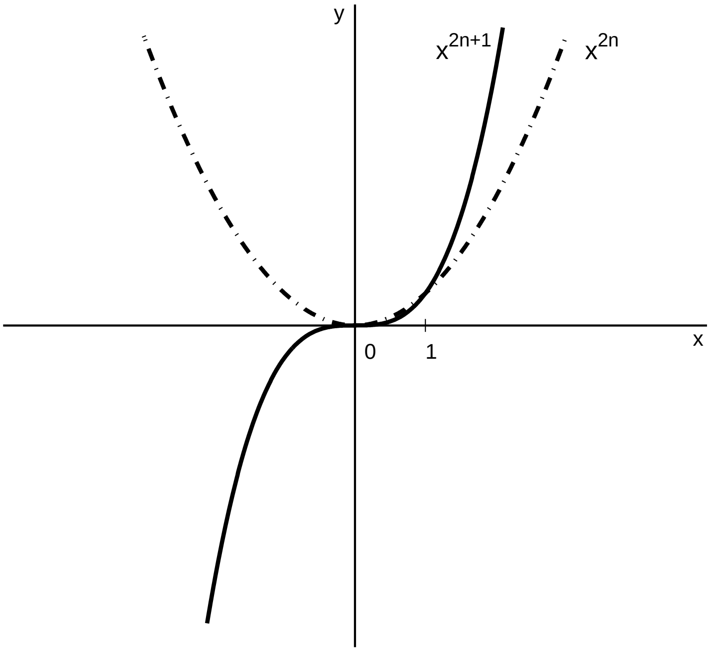
6.4 Mocninné funkce

Jako nejjednodušší příklady mocninných funkcí nám mohou posloužit funkce svazující povrchy nebo objemy těles s jejich stranami nebo průměry ($V(a) = a^3, S = \pi r^2$). Když zvětšíme stranu čtverce $k-$krát, zvětší se jeho povrch k^2-krát, objem krychle by se zvětšil k^3-krát. Obecně když zvětšíme objekt v rovině třeba dvakrát, zvětší se jeho povrch 2^2-krát, objem objektů v prostoru by se pak zvětšil 2^3-krát. Galileo Galilei dokázal pomocí tohoto pravidla odhadnout maximální možnou výšku stromu.

Strom snese jen určitý tlak. Tlak je podíl síly a plochy, na kterou tato působí ($p = \frac{F}{S}$). V našem případě se jedná o gravitační sílu, která závisí na hmotnosti stromu, a ta zase na objemu stromu V a hustotě dřeva ρ_d ($F = mg, F = \rho_d V g$). Objem stromu ale roste s třetí mocninou výšky ($V = k_1 v^3$) na rozdíl od plochy řezu stromu, který roste jen s druhou mocninou ($S = k_2 v^2$) výšky stromu v. Tlak v řezu stromu tak roste s první (3-2) mocninou výšky:

$$p = \frac{\rho_d k_1 v^3 g}{k_2 v^2} = \frac{\rho_d k_1 g}{k_2} v = konstanta \cdot v.$$

Galileo Galilei došel k maximální možné výšce stromu asi 100 metrů. Tento princip ale platí daleko obecněji.



Obrázek 6.8: Mocninné funkce pro přirozené liché a sudé mocniny

Mocninné funkce (Obrázek 6.9) se budou lišit svými definičními obory, obecně lze psát

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

$$f : y = x^a, a \in \mathbb{R}.$$

Pro celočíselné mocniny (přirozené mocniny jsou na Obrázku 6.8) můžeme rozšířit definiční obor,

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},$$

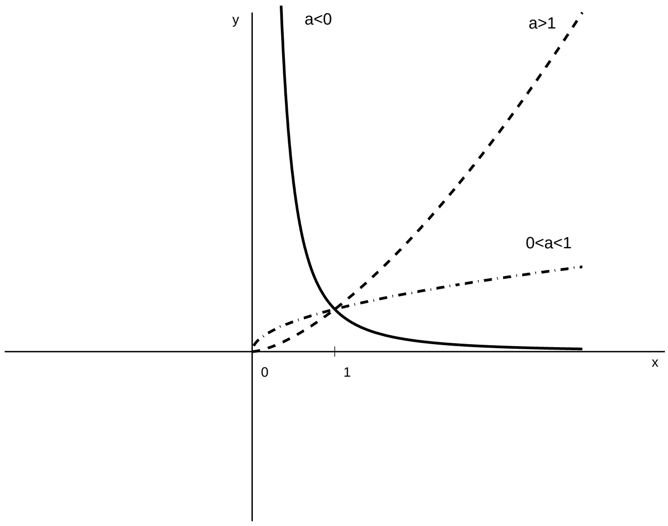
$$f : y = x^a, a \in \mathbb{Z}.$$

Pro kladné mocniny bude maximálním definičním oborem $\mathbb{R}$,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f : y = x^a, a > 0.$$

Poznámka 6.3. Grafy mocninných funkcí procházejí bodem $[1, 1]$.



Obrázek 6.9: Mocninné funkce $f(x) = x^a$ pro reálné mocniny

Graf pro reálné záporné mocniny vypadá jako pravé rameno nepřímé úměrnosti.

✎ *Cvičení* 6.6.

1. Najděte maximální definiční obor funkce s předpisem

$$f(x) = \sqrt{x-3},\ g(x) = x^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Najděte takové $a \in \mathbb{R}$, aby graf funkce $f : y = ax^3$ procházel bodem $[2,4]$.

3. Která z čísel $0,6^2;\ 2,15^4;\ (\frac{2}{3})^{0,75};\ (\frac{\pi}{2})^{1,01}$ jsou větší než 1?

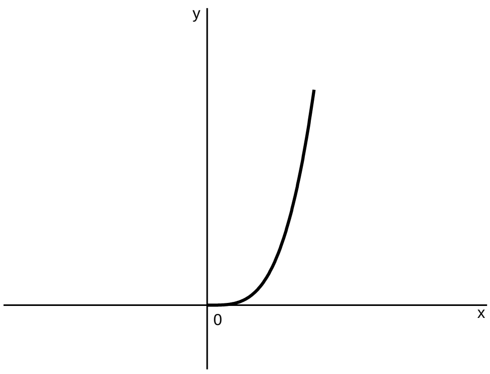
✓ *Řešení.* $D_f = \langle 3,\infty)$, $D_g = (0,\infty)$ ✓$a = \frac{1}{2}$✓$2,15^4 > 1$, $(\frac{\pi}{2})^{1,01} > 1$

✎ *Cvičení* 6.7. Načrtněte grafy funkcí:

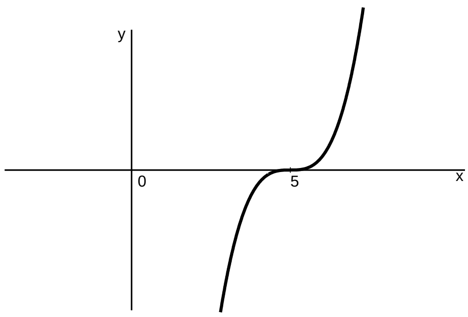
1. $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$,
2. $f(x) = (x-5)^3$,
3. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$,
4. $f(x) = x^{-\pi}$,
5. $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

6. $f(x) = \sqrt{2-x}$.

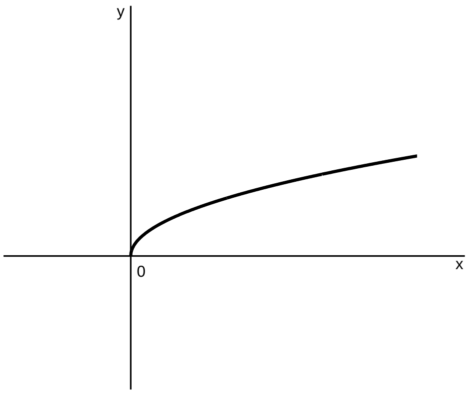
✓ *Řešení.*



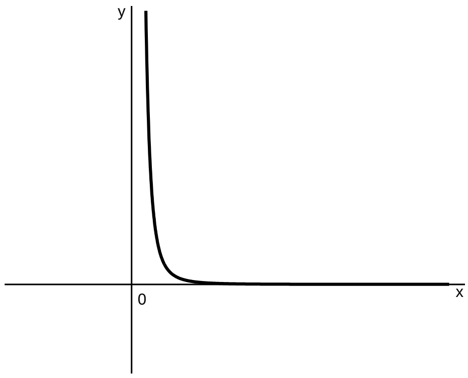
Graf funkce $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$



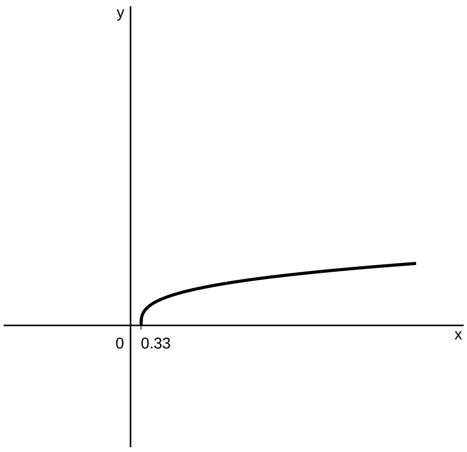
Graf funkce $f(x) = (x-5)^3$



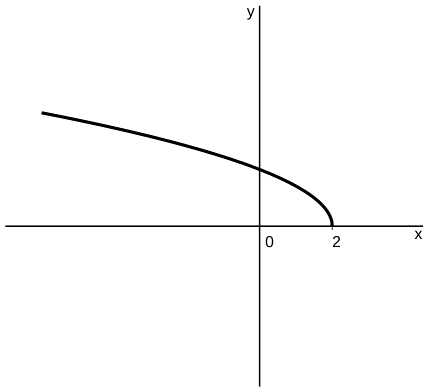
Graf funkce $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$



Graf funkce $f(x) = x^{-\pi}$



Graf funkce $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$



Graf funkce $f(x) = \sqrt{2-x}$

6.5 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce úspěšně popisují neomezené množení, třeba bakterií při dostatku živin a prostoru. Pokud se například buňka jednou za hodinu rozdělí, bude počet buněk popisovat funkce $y = 2^x$, kde x je čas v hodinách (definiční obor může být pro jednoduchost podmnožina $\mathbb{N}$). Počet buněk pak vykazuje exponenciální růst (když zanedbáme všechny vlivy, které počet redukují). Naopak k exponenciálnímu poklesu dochází při odbourávání látek v těle nebo při radioaktivním rozpadu prvků.

Předpokládejme, že tělo odbourá $\frac{3}{4}$ množství léku denně. Po prvním dni zbude v těle $\frac{1}{4}$ původního množství, během druhého dne se ze zbytku odbourají $\frac{3}{4}$, zůstane tedy $\frac{1}{16}\ldots$ Závislost množství léku v těle na čase popíše funkce $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, kde x je čas ve dnech a definiční obor je $(0, \infty)$.

Exponenciální funkci obecně zapíšeme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

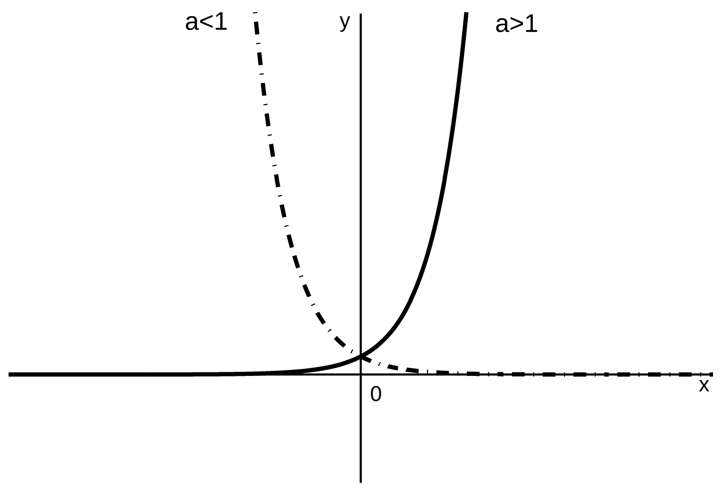
$$f : y = a^x, a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Rozlišujeme dva tvary grafů (Obrázek 6.10) a hlavně chování, pro $0 < a < 1$ funkce klesá a pro $a > 1$ roste k nekonečnu.

Poznámka 6.4. Všechny grafy exponenciálních funkcí prochází bodem $[0, 1]$. Exponenciální funkce má vždy kladné hodnoty.

✎ *Cvičení* 6.8.

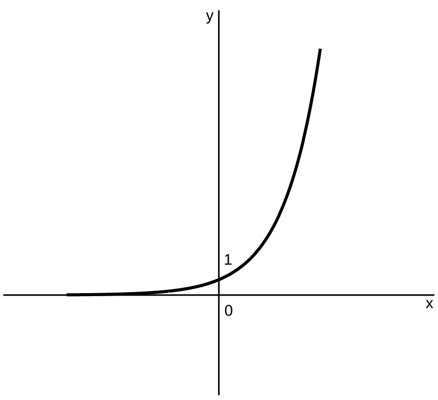
1. Co nastává pro $a = 1$?
2. Která z čísel $0,6^2;\ 2,15^4;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{0,75};\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1,01}$ jsou větší než 1?



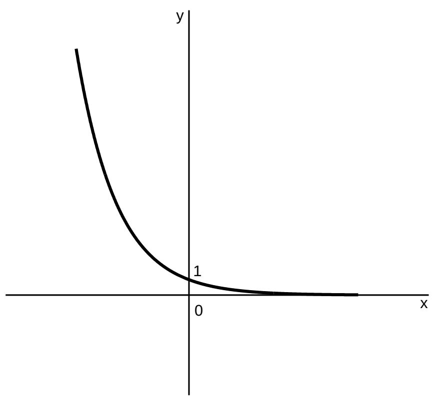
Obrázek 6.10: Chování exponenciální funkce $f(x) = a^x$

3. Načrtněte grafy $f(x) = 2^x,\ f(x) = 2^{-x},\ f(x) = -2^x,\ f(x) = -2^{-x}$.

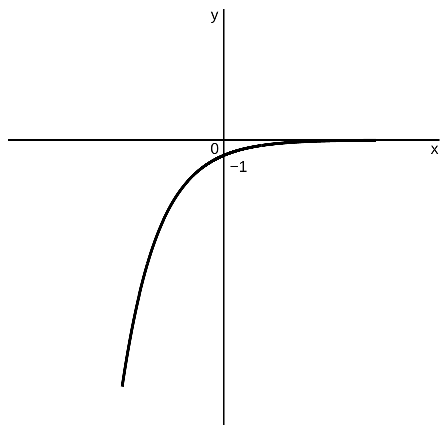
✓ *Řešení.* $1^x = 1,\ \forall x \Rightarrow f(x) = 1$✓Tuto úlohu můžeme řešit také pohledem na graf exponenciální funkce pro $a > 1$ a $a < 1$.



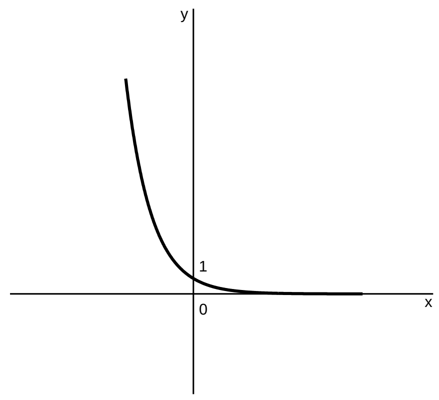
Graf funkce $f(x) = 2^x$



Graf funkce $f(x) = 2^{-x}$



Graf funkce $f(x) = -2^x$



Graf funkce $f(x) = -2^{-x}$

Poznámka 6.5. Zkusme si povšimnout, že platí $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ a že funkci $y = (\frac{1}{3})^x$ získáme převrácením grafu 3^x kolem osy y.

6.6 Logaritmická funkce

O *logaritmické funkci* (Obrázek 6.11) se brzy dozvíme, že je inverzní k funkci exponenciální. Usnadňuje nám proto práci s výrazy nebo rovnicemi s exponenciálními členy.

Píšeme

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},$$

$$f : y = \log_a x, a > 0, a \neq 1,$$

kde číslo a se nazývá základ logaritmu. Definiční obor funkce $D_f = (0, \infty)$ nám dovoluje logaritmovat jen **kladná čísla.**

Platí:

$$a^y = x.$$

To znamená, že

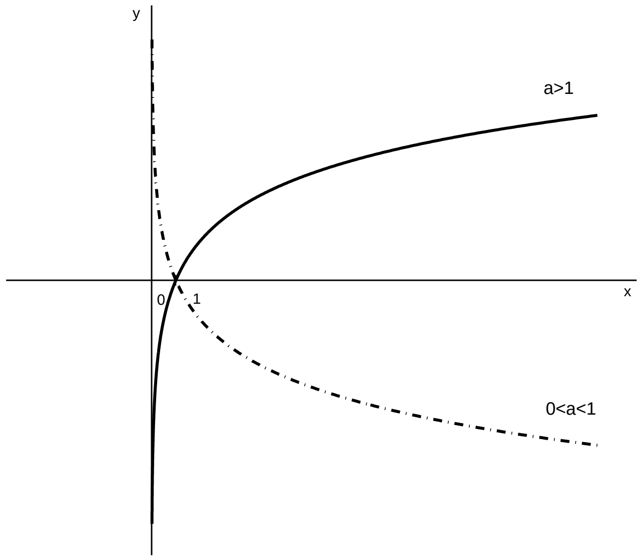
$$\log_3 81 = 4,$$

protože

$$3^4 = 81.$$

Označujeme:

- $\ln x = \log_e x$,
- $\log x = \log_{10} x$.



Obrázek 6.11: Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$

Mluvíme o přirozeném a dekadickém logaritmu. Tyto dva se používají nejčastěji.

✎ *Cvičení* 6.9. Najděte maximální definiční obor funkce s předpisem

1. $f(x) = \log(4x - x^2)$,
2. $g(x) = \log(x^2 - x - 6)$,
3. $h(x) = \frac{1}{\log(x-3)}$.

✓ *Řešení.* $D_f = (0,4)$✓$D_g = \mathbb{R} - \langle -2, 3\rangle$✓$D_h = (3,\infty) - \{4\}$

Měli bychom znát základní pravidla pro logaritmování:

- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$,
- $\log_a 1 = 0, a \neq 1$,
- $\log_a a = 1, a \neq 1$,
- $\log_a u \cdot v = \log_a u + \log_a v$,
- $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$,
- $\log_a u^v = v \log_a u$,
- $a^{\log_a x} = x$.

S logaritmy pracujeme podobně jako s odmocninami, často převádíme logaritmy větších čísel na logaritmy čísel menších. Můžeme částečně zlogaritmovat 10000 podle vzorců:

$$\log_2 10000 = \log_2 10^4 = 4\log_2 10 = 4\log_2 2\cdot 5 = 4(\log_2 2+\log_2 5) = 4(1+\log_2 5),$$

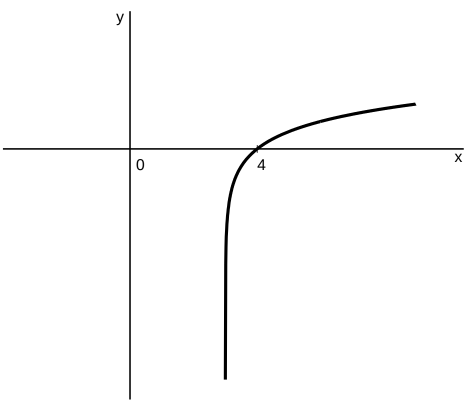
nebo výraz

$$\begin{aligned} \ln\frac{6x^6e^{3x+2}}{60x2^x} = \ln\frac{x^6e^{3x+2}}{10x2^x} &= \ln(x^6e^{3x+2}) - \ln(10x2^x) \\ &= \ln(x^6)+\ln(e^{3x+2}) - (\ln(10)+\ln(x)+\ln 2^x) \\ &= 6\ln(x)+(3x+2)\ln(e) - (\ln(10)+\ln(x)+x\ln 2) \\ &= 6\ln(x)+3x+2-(\ln(10)+\ln(x)+x\ln 2) \\ &= 5\ln(x)+3x+2-\ln(10)-x\ln 2. \end{aligned}$$

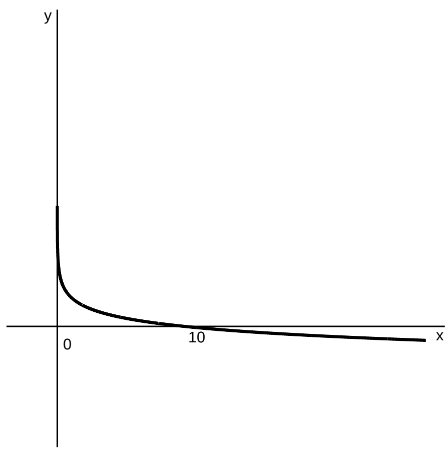
✎ *Cvičení* 6.10.

1. Zjednodušte: $\log_{10} 100,\ \ln\frac{1}{e^2},\ \log_5 5\sqrt{5}$.
2. Zjednodušte: $\log 100\sqrt[3]{100},\ \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{64}, \log 20+\log 50$.
3. Zjednodušte: $\log(x^2 2^x),\ \log(x^5 10^{2x+3})$.
4. Najděte x tak, aby $\log_2 x = -2,\ \log_x 625 = 4$.
5. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = \log(x-3)$ a $f(x) = 1-\log x$.

✔ *Řešení.* $2, -2, \frac{3}{2}$✔$\frac{8}{3}, -12, 3$✔$x\log 2+2\log x, 5\log x+(2x+3)$✔$\frac{1}{4}, 5$



Graf funkce $f(x) = \log(x-3)$



Graf funkce $f(x) = 1-\log x$

6.7 Goniometrické funkce

Dříve než se seznámíme s funkcemi sinus, kosinus, tangens, měli bychom si osvěžit pojem úhlu. Dvě polopřímky VA a VB se společným bodem V rozdělí rovinu, ve které leží, na dvě části. Každá z těchto částí roviny včetně obou polopřímek VA a VB se nazývá *úhel* AVB. Bodu V se říká *vrchol úhlu*, polopřímkám VA a VB *ramena úhlu*. Často se úhly označují také malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Velikost úhlu udává odchylku dvou směrů reprezentovaných rameny VA a VB. Měří se buď ve *stupňové* nebo *obloukové* míře. Velikostí úhlu AVB ve stupňové míře nazýváme nezáporné číslo, které vyjadřuje, kolikrát je úhel větší než jeden úhlový stupeň. Jednotkový úhel (krátce stupeň, značí se °) je úhel rovnající se $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Ve stupňové míře se užívá i menších jednotek, úhlových minut (značí se $'$) a úhlových vteřin (značí se $''$). Platí

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

U definice obloukové míry úhlu je zásadní *jednotková kružnice*. Takováto kružnice má poloměr $r = 1$ a sestrojíme ji se středem ve V. Její průsečíky s rameny VA a VB označíme A_1 a B_1. Potom velikostí úhlu AVB v míře obloukové nazýváme délku oblouku (části kružnice) A_1B_1, který leží uvnitř úhlu AVB. Jednotkou je radián (značí se rad, ale obvykle se nezapisuje). U odvozování velikostí některých úhlů můžeme využít vzorce pro obvod kružnice

$$o = 2\pi r,$$

pro jednotkovou to znamená

$$o = 2\pi,$$

pravý úhel tak má velikost $\frac{\pi}{2}$rad, protože je čtvrtinou *plného úhlu*.

Při převodech jednotek velikosti úhlů využíváme toho, že *přímý úhel* má velikost

$$180^\circ = \pi\mathrm{rad},$$

tedy

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad}$$

a

$$1\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Snadno odvodíme

$$30^\circ = \frac{30}{180}\pi\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6}\mathrm{rad}$$

a

$$\frac{3}{4}\pi\mathrm{rad} = \frac{3\cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ.$$

Když jedno rameno prohlásíme za počáteční a druhé za koncové, dostaneme *orientovaný úhel*. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým VB označíme $\widehat{AVB}$. Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$ nazýváme každé z reálných čísel $\alpha + k\cdot 360^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a α určíme takto:

1. je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0^\circ$, resp. 0,

2. je-li $VA \neq VB$, je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček).

Platí tedy

$$0 \leq \alpha < 360^\circ \ (0 \leq \alpha < 2\pi),$$

velikosti α se říká *základní velikost úhlu.*

Základní velikost úhlu se nám asi bude nejlépe představovat na ručičkových hodinách. Velikost úhlu, který svírá minutová a hodinová ručička v 9 hodin je 90° $(\frac{\pi}{2})$, protože se jedná o pravý úhel. Když vezmeme jako počáteční rameno hodinovou ručičku, tak velikost orientovaného úhlu mezi ručičkami bude 270° $(\frac{3\pi}{2})$, o tento úhel musíme otočit zpátky hodinovou ručičkou, abychom se s ní dostali pod minutovou.

✎ *Cvičení* 6.11. Najděte obloukové i stupňové velikosti orientovaných úhlů mezi ručičkami hodin v

1. 6:00,

2. 11:00,

3. 4:00,

4. 8:30.

✓ *Řešení.* π, 180°✓$\frac{11}{6}\pi$, 330°✓$\frac{2}{3}\pi$, 120°✓$\frac{5}{12}\pi$, 75°

Hned se třemi úhly se setkáme v trojúhelníku. My se budeme zajímat hlavně o ty pravoúhlé. Víme, že součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180°, v pravoúhlém trojúhelníku zbývá na nepravé úhly 90°. Měli bychom připomenout, že trojúhelníky jsou podobné, právě když mají stejné velikosti úhlů, což nastává tehdy, když se shodují poměry odpovídajících si stran.

Budeme uvažovat pravoúhlé trojúhelníky ABC s úhlem α u vrcholu A, pravým úhlem γ u vrcholu C, a tedy úhlem $180^\circ - 90^\circ - |\alpha| = 90^\circ - |\alpha|$ u vrcholu B. Pro stejné α jsou si všechny takovéto pravoúhlé trojúhelníky podobné, a mají tak stejný poměr odpovídajících si stran. Uvažujme libovolné podobné trojúhelníky ABC a A'B'C' s úhlem α u vrcholů A i A'.

Pak můžeme označit

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \sin\alpha.$$

$\sin\alpha$ bude funkce, která přiřadí zatím každému ostrému úhlu α odpovídající poměr protilehlé odvěsny k přeponě.

Podobně označíme

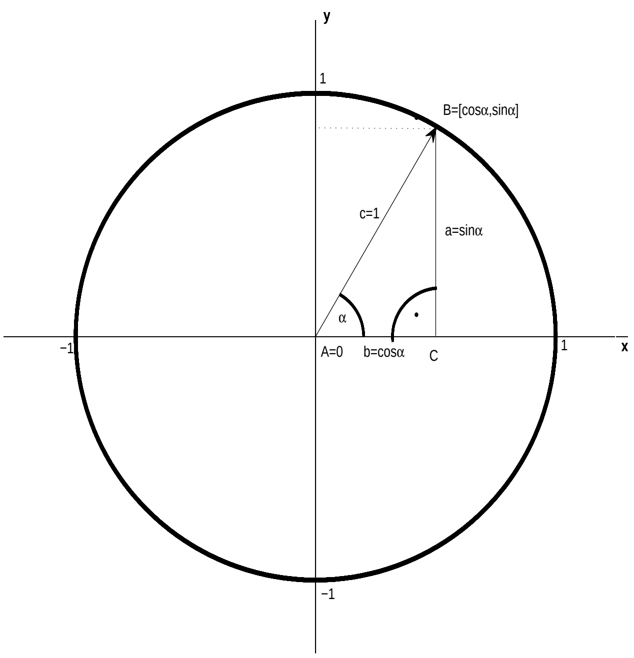
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos\alpha.$$

$\cos\alpha$ bude funkce, která přiřadí zatím každému ostrému úhlu α odpovídající poměr přilehlé odvěsny k přeponě.

Nakonec ještě

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

tgα bude funkce, která přiřadí zatím každému ostrému úhlu α odpovídající poměr protilehlé odvěsny k přilehlé.



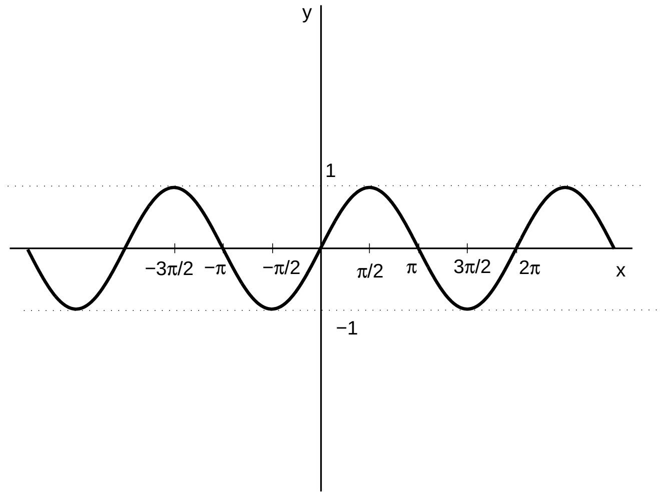
Obrázek 6.12: Odvození hodnot funkcí $f(x) = \sin(x)$ a $f(x) = \cos(x)$

Nejnázornější je odvození průběhu funkcí sinus a kosinus na jednotkové kružnici. Uvažujeme uvnitř rameno nejdříve mířící do bodu $[1, 0]$. Rameno se zatím bude moci otočit proti směru hodinových ručiček o (kladný) úhel α menší než $\frac{\pi}{2}$. Z bodu, ve kterém se otočené rameno protne s kružnicí, spustíme kolmici na osu x. Ta nám s oběma rameny vymezí pravoúhlý trojúhelník s přeponou c délky 1. Tedy odvěsna ležící na ose x má délku $\cos\alpha$ a zbývající svislá $\sin\alpha$, protože

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b,$$

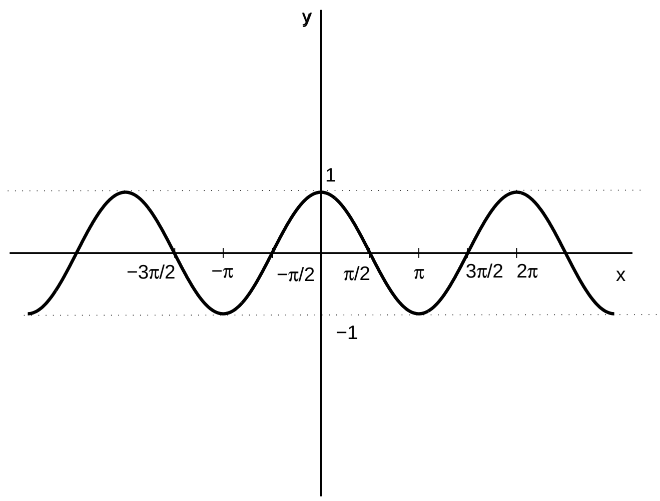
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a.$$

Zatím $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ odpovídají souřadnicím bodu (konce ramena), který se pohnul o kladný úhel (dráhu na jednotkové kružnici) $\alpha < \frac{\pi}{2}$ po jednotkové kružnici z bodu $[1, 0]$. Funkce sinus a kosinus pak obecně určují souřadnice bodu, kam se dostane bod $[1, 0]$ při rotaci o orientovaný úhel α (Obrázek 6.12).



Obrázek 6.13: Graf funkce $f(x) = \sin(x)$

Při kreslení grafu funkce sinus (Obrázek 6.13) znázorňujeme na ose x úhel (vzdálenost uraženou vzdálenost z bodu $[1, 0]$ po jednotkové kružnici). Na osu y vynášíme výšku bodu nad osou x. Graf funkce kosinus (Obrázek 6.14) sestrojíme obdobně, jen jako hodnoty funkce tentokrát bereme $x-$ovou souřadnici bodu na kružnici. Definičním oborem obou funkcí je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.



Obrázek 6.14: Graf funkce $f(x) = \cos(x)$

✎ *Cvičení* 6.12. Pro která reálná čísla (úhly v rad) jsou funkce sinus a kosinus záporné?

✓ *Řešení.* Jedná se o 2πperiodické funkce, proto budou záporné na nekonečném sjednocení intervalů

$$\sin(x) < 0 \text{ pro } x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi),$$

$$\cos(x) < 0 \text{ pro } x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi).$$

Některé hodnoty funkcí sinus a kosinus jsou všeobecně známy. Třeba hodnotu $\sin\frac{\pi}{4}$ odvodíme z poměru stran jednoho ze dvou trojúhelníků, které vzniknou, když ve čtverci nakreslíme úhlopříčku. Pokud bude mít strana čtverce, a tedy i odvěsny délku d, pak přepona bude délky $\sqrt{2}d$. Snadno zjistíme pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$ z

$$a = d,\ b = d,\ c = \sqrt{2}d,$$

že

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{d}{\sqrt{2}d} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stejně bychom našli (stejnou) hodnotu pro funkci kosinus.

✎ *Cvičení* 6.13. Z rozpůleného rovnostranného trojúhelníku zkuste odvodit

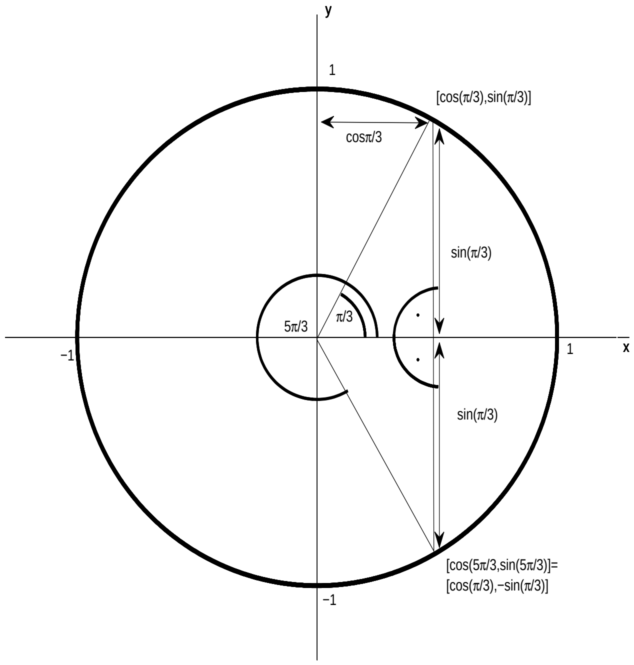
$$\sin\frac{\pi}{6},\ \cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{3}.$$

Nejpoužívanější hodnoty funkcí sinus a kosinus si uvedeme v tabulce:

	α				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

S pomocí těchto hodnot se dají ručně odvodit na jednotkové kružnici i další hodnoty funkcí sinus a kosinus pro úhly z množiny $\{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = k\frac{\pi}{4} \vee \alpha = k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$. K takovému odvození se používají symetrie na kružnici.

Chceme spočítat například $\sin\frac{5\pi}{3}$ nebo $\cos\frac{5\pi}{3}$. Bod, do kterého se dostaneme z $[0, 1]$ uražením vzdálenosti $\frac{5\pi}{3}$ po jednotkové kružnici, je osově souměrný vzhledem k ose



Obrázek 6.15: Odvození hodnot $\sin\frac{5\pi}{3}$ a $\cos\frac{5\pi}{3}$

x s bodem odpovídajícím úhlu $\frac{\pi}{3}$ (Obrázek 6.15). Má tedy stejnou $x-$ovou souřadnici a opačnou $y-$ovou souřadnici. Proto

$$\sin\frac{5\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

✎ *Cvičení* 6.14. Při výpočtech hodnot funkcí sinus a kosinus stačí uvažovat základní velikosti úhlů, což je zřejmé jak z grafů funkcí, tak z pohybu bodu po kružnici. Spočítejte:

1. $\sin\frac{2\pi}{3}$,

2. $\cos\frac{11\pi}{6}$,

3. $\sin\frac{5\pi}{4}$,

4. $\sin\frac{13\pi}{2}$,

5. $\cos\frac{25\pi}{4}$,
6. $\sin-\frac{17\pi}{3}$.

✓ *Řešení.* $\frac{\sqrt{3}}{2}$✓$\frac{\sqrt{3}}{2}$✓$-\frac{\sqrt{2}}{2}$✓1✓$\frac{\sqrt{2}}{2}$✓$\frac{\sqrt{3}}{2}$

✎ *Cvičení* 6.15. Načrtněte grafy funkcí

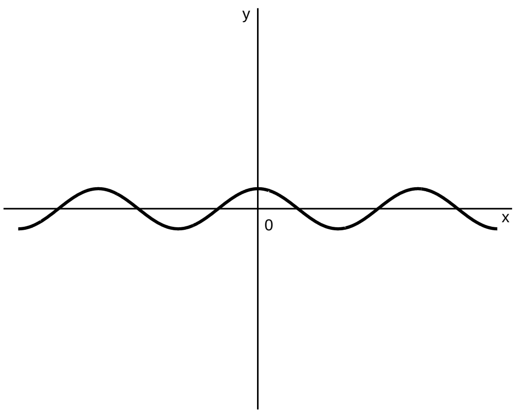
$$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}),\ f(x)=\sin(-x),\ f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2}),\ f(x)=-\sin(x).$$

✓ *Řešení.* Všimněte si, že

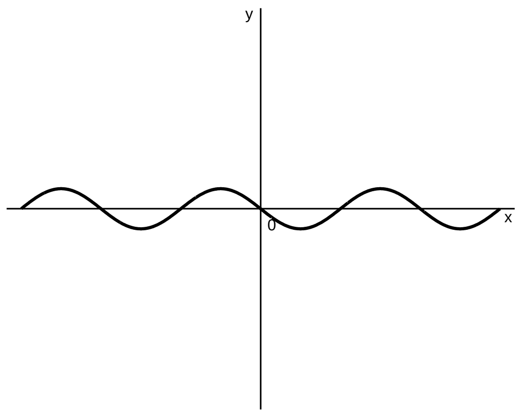
$$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x,$$
$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$$

a také

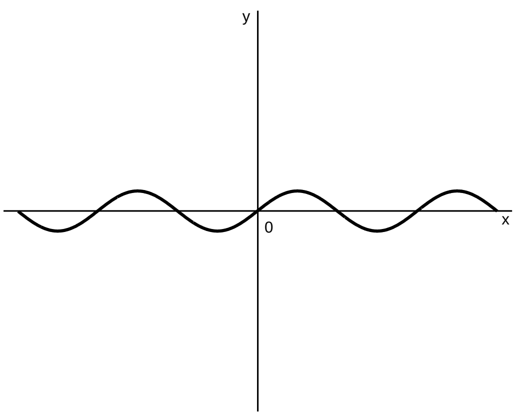
$$\sin(-x)=-\sin(x).$$



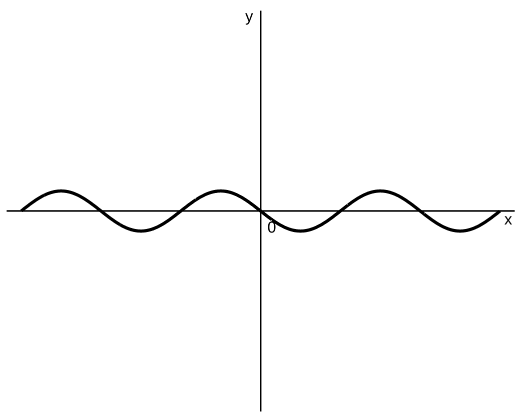
Graf funkce $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$



Graf funkce $f(x)=\sin(-x)$



Graf funkce $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$



Graf funkce $f(x)=-\sin(x)$

Zmíníme ještě funkce *tangens* a *kotangens*, (Obrázek 6.16) získáme je dělením funkcí sinus a kosinus:

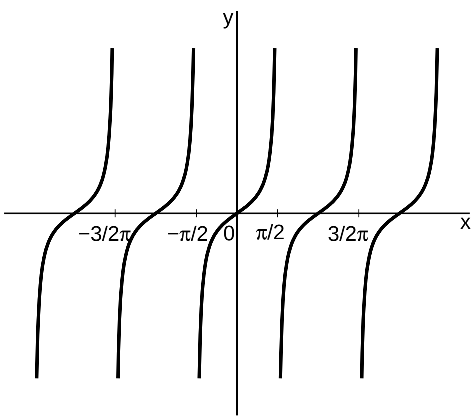
$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definiční obory těchto funkcí jsou samozřejmě ochuzeny o čísla x, pro která jsou jmenovatelé 0. Definujeme $f : R - \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

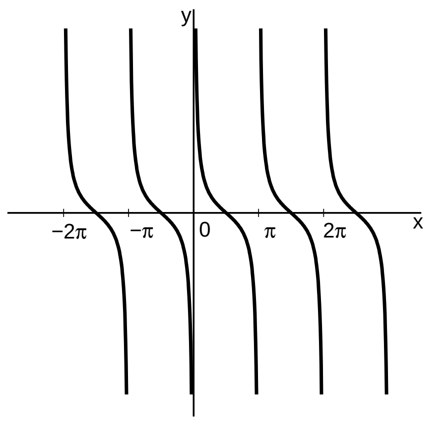
$$f(x) = \mathrm{tg}(x)$$

a $f : R - \{x \in \mathbb{R}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = \mathrm{cotg}(x).$$



Graf funkce $f(x) = \mathrm{tg}(x)$



Graf funkce $f(x) = \mathrm{cotg}(x)$

Obrázek 6.16: Grafy funkcí $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ a $f(x) = \mathrm{cotg}(x)$

Uvedeme si nejznámější vztahy pro goniometrické funkce:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\mathrm{tg}\ x \cdot \mathrm{cotg}\ x = 1$,
- $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

- ☛ $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
- ☛ $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \sin y$,
- ☛ $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \sin y$,
- ☛ $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$,
- ☛ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$,
- ☛ $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$,
- ☛ $\cos x + \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$.

Nejvíce budeme potřebovat první tři vzorce.

Například při integrování se nám hodí zapsat $\sin^2 x$ pomocí prvních mocnin goniometrických funkcí. Vyjdeme ze třetího vzorce

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

a pomocí prvního vzorce můžeme dosadit místo $\cos^2 x$ výraz $1 - \sin^2 x$,

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x.$$

Vyjádříme $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Odtud by vyplynul další vzorec

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

✎ *Cvičení* 6.16. Zjednodušte:

$$\frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^3 x - \cos x}, \quad \frac{1 - \cos 2u + \sin 2u}{1 + \cos 2u + \sin 2u}, \quad \frac{\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} + \frac{\operatorname{cotg} t}{1 - \operatorname{cotg}^2 t}$$

✓ *Řešení.* $\frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$✓ $\frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$✓ 0, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi$

6.8 Složené funkce

Dobře známe funkce
$$g(x) = e^x \text{ nebo } h(x) = -x^2.$$
Často se ale setkáváme s funkcemi tvaru třeba
$$f(x) = e^{-x^2},$$
kde jsme v podstatě nahradili proměnnou ve funkci funkčním předpisem jiné funkce. Funkce tak vznikla složením dvou jiných.

Definice 6.1. Nechť pro funkce f a g platí, že
$$\{x \in D_f,\ f(x) \in D_g\} \neq \emptyset.$$
Pak funkce
$$g(f(x)), x \in \{x \in D_f,\ f(x) \in D_g\},$$
se nazývá *složená funkce*. Funkce f se nazývá *vnitřní* a g *vnější funkce*. Značíme také $(g \circ f)(x)$.

Protože vnější funkce zobrazuje hodnoty funkce vnitřní, je potřeba, aby aspoň nějaké hodnoty vnitřní funkce patřily do definičního oboru vnější funkce. Nemohli bychom skládat například $g(f)$ v případě
$$f(x) = -\frac{1}{x^2},\ g(x) = \sqrt{x},$$
protože funkce f vrací záporné hodnoty, které se nedají dosadit pod odmocninu.

Podívejme se na příklad použití složené funkce. Dva kamarádi vlastní společnost Med v.o.s. Prodávají med za 100Kč za kilo. Jejich měsíční tržby se tedy dají počítat pomocí funkce $m : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$m(x) = 100 \cdot x,$$
kde x je prodané množství medu v kilech.

Z měsíční tržby platí fixní měsíční náklady 1000Kč a zbytek si rozdělí. Výdělek jednoho v závislosti na tržbách se dá popsat funkcí $v : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$v(x) = \frac{x - 1000}{2},$$
kde x označuje tržby.

Když bude někoho z kamarádů zajímat, jak jeho výdělek závisí na prodaném množství medu, dosadí do předpisu pro v za x výraz $100 \cdot x$ a dostane funkci $w : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$w(x) = \frac{100x - 1000}{2}.$$

Takto složil funkce v a m. Funkce m dává nezáporné hodnoty $(H_m \subset D_v)$, pro které je funkce v definována, tedy tyto dvě funkce jde podle definice složit.

Složme třeba funkce

$$g(x) = x^2 + 3x + 2,\ f(x) = 3x + 1,$$

$$g(f(x)) = (3x+1)^2 + 3(3x+1) + 2.$$

Funkční hodnota složené funkce v bodě se dá počítat buď z předpisu složené funkce,

$$g(f(1)) = (3 \cdot 1 + 1)^2 + 3(3 \cdot 1 + 1) + 2 = 30$$

nebo postupně,

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4,\ g(4) = 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 30.$$

✎ *Cvičení* 6.17.

1. Napište $f(g)$ i $g(f)$ a najděte definiční obor:

$$f(x) = \sin(x),\ g(x) = x^3;$$
$$f(x) = \sqrt{x-3},\ g(x) = x^6 + 3;$$
$$f(u) = \tfrac{3u^2-u}{u^2+3},\ g(h) = h^4;$$
$$f(t) = 5t^2 + 8t,\ g(l) = \log l^2.$$

2. Naopak najděte dvojice elementárních funkcí, jejichž složením vzniknou funkce:

$$r(t) = (t^2+1)^3,\ a(x) = \sqrt{x^2-4},\ d(x) = \log^2 x - 4\log x,\ f(x) = 5^{\sqrt{x}}.$$

3. Najděte a, pro které $h(h(2)) = 17,\ h(x) = ax + 3$.

4. $f(x) = x - 1, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = x + 3$, najděte předpisy $f(g(h)),\ h(g(f))$ a funkční hodnoty v bodě 6.

✓ *Řešení.* $f(g(x)) = \sin(x^3), D_{f(g)} = \mathbb{R}, g(f(x)) = \sin^3(x), D_{g(f)} = \mathbb{R}$✓ $f(g(x)) = x^3, D_{f(g)} = \mathbb{R}, g(f(x)) = (\sqrt{x-3})^6 + 3, D_{g(f)} = \langle 3, \infty)$✓ $f(g(h)) = \frac{3h^8-h^4}{h^8+3}, D_{f(g)} = \mathbb{R}, g(f(u)) = \left(\frac{3u^2-u}{u^2+3}\right)^4, D_{g(f)} = \mathbb{R}$✓ $f(g(l)) = 5(\log l^2)^2 + 8\log l^2\ D_{f(g)} = \mathbb{R} - \{0\}, g(f(t)) = \log(5t^2+8t)^2, D_{f(g)} = \mathbb{R} - \{-\frac{8}{5}, 0\}$✓ $r = f(g),\ f(x) = x^3, g(t) = t^2 + 1; a = f(g),\ f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 4; d = f(g),\ f(x) = x^2 - 4x, g(x) = \log x;\ f = h(g), h(x) = 5^x, g(x) = \sqrt{x}$✓ $a \in \{2, -\frac{7}{2}$✓ $f(g(h(x))) = \sqrt{x+3} - 1,\ f(g(h(6))) = 2;\ h(g(f(x))) = \sqrt{x-1} + 3, h(g(f(6))) = \sqrt{5} + 3$

6.9 Inverzní funkce

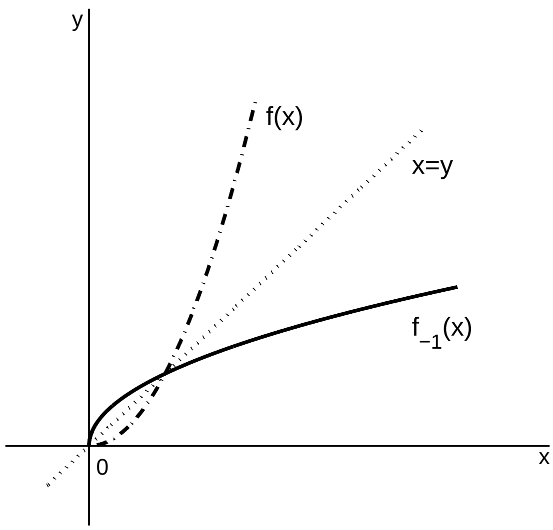
Funkce pro dráhu uraženou při volném pádu

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2, t \geq 0$$

dává dohromady dvojice (čas, dráha padajícího tělesa) pro různé nezáporné časy. Kdybychom chtěli získat funkci, která popisuje, jak závisí doba pádu na uražené vzdálenosti, bude to množina stejných dvojic jen s přehozeným pořadím (dráha padajícího tělesa, čas) pro všechny nezáporné dráhy, kde i délka bude nezáporná. Protože každou dráhu přiřazujeme právě jednomu času (prostá funkce), každé uražené vzdálenosti přiřadíme právě jeden čas (funkce). Takovou funkci zadáme pomocí předpisu

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}}, s \geq 0.$$

Nový předpis jsme získali vyjádřením proměnné z původního. Vytvořili jsme tak inverzní funkci (Obrázek 6.17).



Obrázek 6.17: Funkce je s funkcí inverzní souměrná podle osy prvního kvadrantu

Definice 6.2. Nechť funkce $f(x)$ je prostá na D_f, pak *inverzní funkce* k funkci f se nazývá funkce $f_{-1}(x), D_{f_{-1}} = H_f$, pro kterou platí

$$f_{-1}(f(z)) = z, z \in D_f.$$

Poznámka 6.6. Inverzní funkce se často označuje horním indexem -1, ale kvůli odlišení od $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ budeme používat index dolní.

Vyzkoušejme definici pro funkci $f(x) = x^3$. Tato funkce je prostá, proto inverzní funkce existuje. Předpis najdeme vyjádřením x.

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Inverzní funkce tedy bude

$$f_{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Složením funkcí získáme

$$f_{-1}(f(z)) = \sqrt[3]{z^3} = z.$$

Poznámka 6.7. Inverzní funkce ke složitějším funkcím se obvykle hledají pomocí inverzních funkcí k těm elementárním. Funkce k sobě inverzní jsou například

$$f(x) = x^{2n+1}: \; f_{-1}(z) = z^{\frac{1}{2n+1}}, n \in \mathbb{Z},$$

$$f(x) = \log_a(x): \; f_{-1}(z) = a^z, a > 0, a \neq 1.$$

Použijeme je pak třeba:

$$f(x) = \log(25x+3),$$

$$y = \log(25x+3) \Rightarrow 10^y = 25x+3 \Rightarrow x = \frac{10^y - 3}{25},$$

a proto

$$f_{-1}(x) = \frac{10^x - 3}{25}.$$

✎ *Cvičení* 6.18. Najděte inverzní funkci k funkcím:

$$f(x) = 2x+3, x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{(x-6)^3}, \; f(x) = e^{6x+3}, \; f(x) = \log 2x + 5$$

✓ *Řešení.* $f_{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, $f_{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} + 6$, $f_{-1}(x) = \frac{\ln x - 3}{6}$, $f_{-1}(x) = \frac{10^x - 5}{2}$,

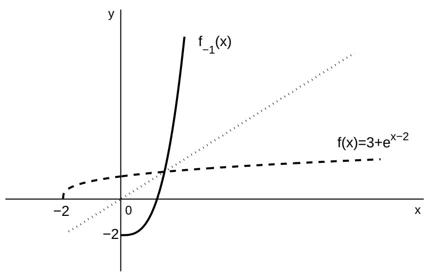
✎ *Cvičení* 6.19. Jak závisí délka hrany krychle na jejím objemu a jak na jejím povrchu?

✓ *Řešení.* $a = \sqrt[3]{V}, V \geq 0, \; a = \sqrt{\frac{S}{6}}, S \geq 0$

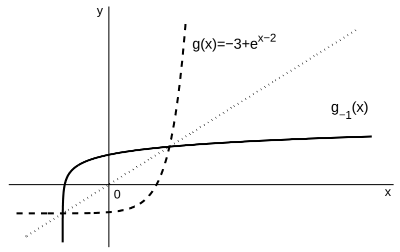
Při grafickém znázornění uplatňujeme to, že inverzní funkce jen převrací x, y souřadnice oproti původní funkci, toho dosáhneme převrácením grafu původní funkce okolo osy $y = x$.

✎ *Cvičení* 6.20. Nakreslete grafy funkcí $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, $g(x) = -3 + e^{x-2}$, a funkcí k nim inverzních. Jaké budou definiční obory inverzních funkcí?

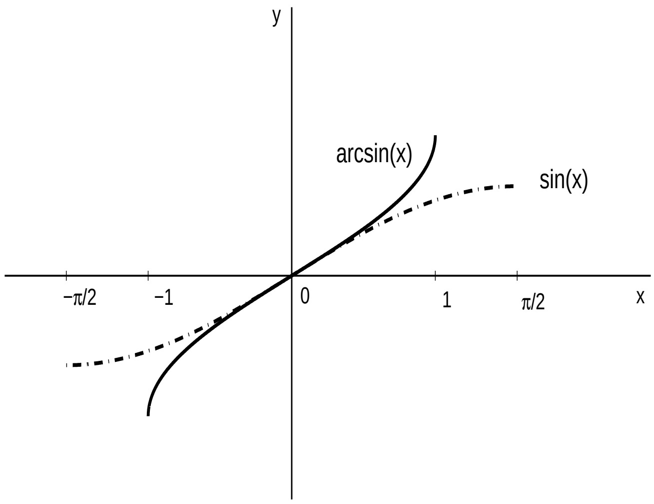
✓ *Řešení.* Definiční obory budou $D_{f_{-1}} = \langle 0, \infty)$ a $D_{g_{-1}} = \langle 3, \infty)$.



Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$



Graf funkce $g(x) = -3 + e^{x-2}$



Obrázek 6.18: Funkce arcsin

✎ *Cvičení* 6.21. Jak pomocí teploměru a stopek určíte výšku stropu místnosti?

✓ *Řešení.* Čím se snadněji měří doba volného pádu?

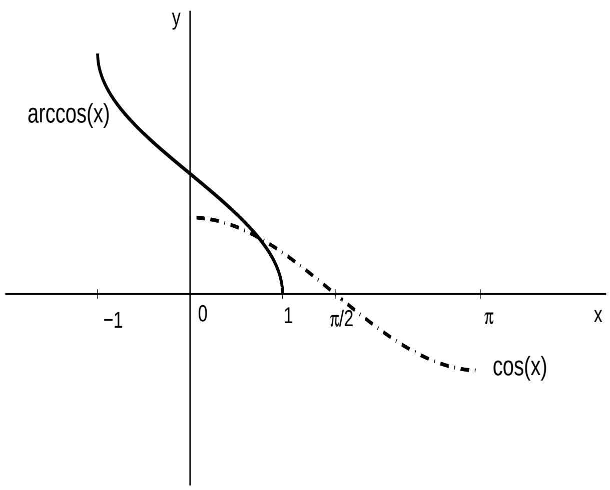
Při řešení goniometrických rovnic uplatníme inverzní funkce k funkcím sinus a kosinus, tedy arcsin (Obrázek 6.18) a arccos (Obrázek 6.19. Funkce sin a cos jsou ale prosté jen na některých intervalech. Proto ke konstrukci a definici inverzních funkcí bereme jen $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x$$

a $g : \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \cos x.$$

Funkce f je rostoucí a zobrazuje interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$ a g je klesající a zobrazuje interval $\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$.



Obrázek 6.19: Funkce arccos

Můžeme tak nadefinovat inverzní funkce $\arcsin(x) = f_{-1}(x)$ a $\arccos(x) = g_{-1}(x)$. Tedy $f_{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$,

$$f_{-1}(x) = \arcsin x$$

a $g_{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$,

$$g_{-1}(x) = \arccos x.$$

6.10 Sudost, lichost a periodičnost funkcí

Definice 6.3. Nechť pro všechna x z definičního oboru funkce platí, že je-li $x \in D_f$, pak i $-x \in D_f$. Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže platí

$$f(-x) = f(x)$$

pro každé $x \in D_f$. Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže platí

$$f(-x) = -f(x)$$

pro každé $x \in D_f$.

Poznámka 6.8. Graficky se sudost nebo lichost posuzuje podle souměrnosti grafu funkce podle osy y nebo podle počátku. První věta definice zmiňuje nutnou podmínku souměrnosti grafu, definiční obor funkce musí být souměrný okolo počátku.

Pokud se nám podaří dokázat sudost nebo lichost funkce, pomůže nám to při zkoumání průběhu funkce. Kromě souměrnosti grafu jsou u sudých funkcí navzájem rovné sudé derivace (nultá derivace odpovídá funkci samotné) a opačné liché derivace v x a $-x$ pro $x \in D_f$. Liché funkce mají stejné liché derivace a opačné sudé derivace v x a $-x$ pro $x \in D_f$. Stačí pak vyšetřovat průběh funkce jen na polovině definičního oboru.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2$$

je sudá, protože

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in D_f = \mathbb{R}.$$

Funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x^3 - x$$

je lichá, protože

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)\ \forall x \in D_g = \mathbb{R}.$$

Funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = xe^x$$

není ani lichá, ani sudá, protože

$$h(-x) = -(xe^{-x}) \neq \pm h(x).$$

Funkce $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 0$$

není ani sudá, ani lichá, protože nemá definiční obor souměrný okolo 0.

✎ *Cvičení* 6.22. Jsou funkce $f(x) = 16x$, $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = a^x + a^{-x}$, $a > 0$, $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ sudé nebo liché?

✓ *Řešení.* lichá ✓sudá ✓sudá ✓ani lichá, ani sudá

Vyšetřování průběhu funkce se nám také zjednoduší, pokud dokážeme, že funkce je periodická.

Definice 6.4. Nechť pro $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ platí, že je-li $x \in D_f$, pak i $x+p, x-p \in D_f$. Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže platí $f(x) = f(x+p)$ pro každé $x \in D_f$. Nejmenší takové p se nazývá *perioda funkce.*

Poznámka 6.9. S dvojicí funkcí $f(x)$ a $f(x+p)$ jsme se už setkali při kreslení grafů. Graf funkce $f(x+p)$ dostaneme z $f(x)$ posunutím grafu $f(x)$ o p doleva. Pokud ale posunujeme graf periodické funkce o p doleva (nebo o jakýkoliv celočíselný násobek p), graf zůstane z definice stejný.

Periodičnost má smysl uvažovat u funkcí obsahujících v předpisech periodické funkce sin, cos, tg, ...

Pokud je funkce periodická, stačí vyšetřovat její průběh jen na jednom intervalu délky periody funkce a pak k vyobrazení hodnot v ostatních bodech definičního oboru využít $f(x+p) = f(x) \forall x \in D_f$.

Najdeme periodu funkce $f(x) = \sin(2x+5)$. Z periodičnosti jednoduché funkce odvodíme periodu složitější funkce. Vyjdeme z toho, že funkce sinus je $2\pi-$periodická, tedy

$$f(x) = \sin(2x+5) = \sin(2x+5+2\pi).$$

Snažíme se $\sin(2x+5+2\pi)$ upravit na tvar $\sin(2(x+p)+5)$, aby se v předpisu $f(x)$ změnilo jen x na nějaké $x+p$. Vytváříme tak složenou funkci $f(x+p)$

$$\sin(2x+5+2\pi) = \sin(2x+2\pi+5) = \sin(2(x+\pi)+5) = f(x+\pi).$$

Dostali jsme periodu π.

✎ *Cvičení* 6.23. Jsou funkce $f(x) = 5x$, $f(x) = 16\cos(x)$, $f(x) = \sin(16x)$, $f(x) = \sin(x^2)$ periodické?

✓ *Řešení.* ne✓ano, $p = 2\pi$✓ano, $p = \frac{\pi}{8}$✓ne

7 | Rovnice

7.1 Rovnice s jednou neznámou

Mnoho matematických úloh a zápisů má formu rovnice (zápis množin, předpisy funkcí, polohy lokálních maxim a minim funkcí). Uvažujme dva výrazy $L(x)$ a $P(x)$ s proměnnou x. Úlohou je určit, kdy (pro které hodnoty proměnné) se hodnoty výrazů rovnají. Zápis této úlohy

$$L(x) = P(x)$$

se nazývá *rovnice*. Výrazu $L(x)$ se říká *levá strana rovnice*, výrazu $P(x)$ *pravá strana rovnice*. Často bývá jedna strana 0. Proměnné x se v rovnici říká *neznámá*. Používají se i další písmena hlavně z konce abecedy, někdy i řecká. Čísla x_k, pro která je rovnice splněna $(L(x_k) = P(x_k))$, se nazývají *kořeny* (řešení) rovnice. Množina čísel D, ze které budeme hledat řešení, se nazývá *definiční obor rovnice*. Množinu všech řešení rovnice budeme značit K, $K \subset D$.

Poznámka 7.1. Zápisům ve tvaru rovnice jsme se nevyhnuli u množin. Kromě grafického znázornění máme dvě možnosti jak množinu zapsat. Můžeme vyjmenovat její prvky nebo určit prvky z nějakého univerza pomocí charakteristické vlastnosti. Tato vlastnost může být zapsána pomocí rovnice, kdy univerzem je definiční obor $D \subset \mathbb{R}$. Například množinu $M = \{-1, 1\}$ zapsat $M = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 1\}$. Rovnice $x^2 = 1$ je jen zkráceným zápisem množiny M. Její řešení spočívá v převedení tohoto zápisu na $M = \{-1, 1\}$.

Najdeme kořeny rovnice

$$x - 6 + 7x = 2^3 + 2.$$

Snažíme se nejdřív zjednodušit výrazy na obou stranách:

$$8x - 6 = 10,$$

k oběma stranám přičteme stejný výraz (+6)

$$8x = 16.$$

Rovnici také můžeme vydělit výrazem (s přihlédnutím k tomu, kdy je nulový)

$$x = 2.$$

Řešením je číslo 2. Obvykle ještě nalezené řešení dosadíme do původní rovnice, abychom se přesvědčili, že ji splňuje.

$$L(2) = 2 - 6 + 7 \cdot 2 = 10,$$

$$P(2) = 2^3 + 2 = 10,$$

$$10 = 10 \Rightarrow L(2) = P(2).$$

Zkusíme najít kořeny složitější rovnice

$$(x^2+1) \cdot \sqrt{x+6} + x = x + 5(x^2+1).$$

Všimněme si nejdříve definičního oboru rovnice $D = \langle -6, \infty)$. Od obou stran odečteme x,

$$(x^2+1) \cdot \sqrt{x+6} = 5(x^2+1).$$

Na obou stranách se dá vytknout výraz x^2+1, a protože je nenulový pro $x \in D$, vydělíme obě strany rovnice výrazem[1] x^2+1,

$$\sqrt{x+6} = 5.$$

Řešení této rovnice najdeme pomocí inverzní funkce k $\sqrt{x}$, což je x^2 (pravé rameno grafu, $D_f = \langle 0, \infty)$). Umocníme obě strany na druhou. Nevýhoda této operace je, že i čísla, která nebyla řešeními původní rovnice, mohou řešit získanou rovnici. Pak je nutné provést zkoušku. Dostaneme

$$x + 6 = 25,$$

$$x = 19.$$

Musíme provést zkoušku dosazením do levé a pravé strany původní rovnice,

$$L(19) = 362 \cdot 5 + 19 = 1829,$$

$$P(19) = 19 + 5 \cdot 362 = 1829.$$

Tedy obě strany mají pro 19 stejnou hodnotu. Číslo 19 řeší rovnici.

Zkusme si utřídit operace, které můžeme při hledání řešení s rovnicemi provádět. Už jsme použili některé z ekvivalentních a důsledkových operací. *Ekvivalentními úpravami* rovnice dostaneme rovnici se stejnými řešeními, jako měla ta původní. Patří mezi ně operace:

- vzájemná výměna stran rovnice,

$$x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - x.$$

[1] Pokud by výraz nabýval pro nějaké $x \in D$ hodnoty 0, pokračovali bychom jako v sekci věnované součinovému tvaru.

- nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná na celém definičním oboru (úpravy na jednotlivých stranách rovnice),

$$x^2 - x = 0 \ \Leftrightarrow \ x(x-1) = 0.$$

- přičtení stejného čísla nebo výrazu, který je definován na celém definičním oboru rovnice, k oběma stranám rovnice,

$$x^2 - 2x = x \ \Leftrightarrow \ x^2 - x = 0.$$

- vynásobení obou stran rovnice týmž **nenulovým** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován na celém definičním oboru rovnice,

$$\frac{x^2-2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} \ \Leftrightarrow \ x^2 - 2x = x.$$

- odlogaritmování („exponování”),

$$4\log(x+5) = 6 \Leftrightarrow 10^{4\log(x+5)} = 10^6.$$

Pokud jsou obě strany rovnice **nezáporné na celém definičním oboru rovnice** (např. $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$), můžeme provádět následující ekvivalentní operace:

- umocnění nebo odmocnění obou stran kladnou mocninou, logaritmování (pokud jsou strany rovnice kladné)

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 81 \Leftrightarrow \log_3(2^x \cdot 3^{x+1}) = \log_3 81.$$

Poznámka 7.2. Obecně můžeme na obě strany rovnice použít prostou funkci, pokud je definována pro všechny hodnoty výrazů na obou stranách.

Důsledkovými úpravami dostaneme rovnice, které mohou mít i další řešení, než jen řešení původní rovnice. Pro nalezená řešení pak musíme provést zkoušku dosazením do původní rovnice. Budou to operace:

- vynásobení obou stran rovnice týmž výrazem s neznámou, který je definován na celém definičním oboru rovnice.

- umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem.

Poznámka 7.3. Ekvivalentní úpravy se někdy liší od důsledkových jen v drobných, ale důležitých detailech. U první z důsledkových úprav už výraz, kterým násobíme, nemusí být nenulový. K provedení druhé důsledkové úpravy zase nepotřebujeme, aby byly strany rovnice nezáporné.

Řešme rovnici

$$\begin{aligned}\sqrt{x+6} &= x\\ \left(\sqrt{x+6}\right)^2 &= x^2\\ x+6 &= x^2\\ x_1 = 3 \quad & \quad x_2 = -2\end{aligned}$$

Protože pravá strana původní rovnice může být záporná, provedli jsme důsledkovou úpravu a tu musí následovat zkouška.

$$\begin{aligned}L(3) &= \sqrt{3+6}\\ L(3) &= 3\\ P(3) &= 3\\ L(3) &= P(3)\\ L(-2) &= 2\\ P(-2) &= -2\\ L(-2) &\neq P(-2)\end{aligned}$$

Původní rovnici řeší jen číslo 3.

Rovnice nemusí mít vždy řešení,

$$\begin{aligned}x+3 &= x+2/-x-2\\ 1 &= 0\end{aligned}$$

pokud se úpravami zbavíme proměnné a dostaneme k rovnici

$$c = 0, c \neq 0$$

nebo když při zkoušce vyloučíme všechna možná řešení. Na druhou stranu může být řešení nekonečně mnoho, např.

$$\frac{x+1}{x+1} = 1,$$

pak

$$K = \mathbb{R} - \{-1\},$$

nebo

$$\sin x = 1,$$
$$K = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jednotlivé typy rovnic podrobně probereme, ale dopředu prozradíme, že často používáme k vyřešení rovnice inverzní funkci k funkci, která se v rovnici vyskytuje. Postup vyzkoušíme na jednoduché rovnici.

$$\begin{aligned}\ln(x+3) &= 5/e^{\cdots}\\ &\quad \text{(odlogaritmujeme)}\\ e^{\ln(x+3)} &= e^5\\ x+3 &= e^5\\ x &= e^5 - 3\end{aligned}$$

V rovnici se vyskytla funkce $\ln x$, proto jsme použili funkci e^x. Pokud naopak bude v rovnici exponenciální funkce, zlogaritmujeme ji.

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 3^{x+1} &= 81 / \log_3 \ldots \\
& \text{(logaritmujeme)} \\
\log_3(2^x \cdot 3^{x+1}) &= \log_3 81 \\
x\log_3 2 + (x+1)\log_3 3 &= \log_3 3^4 \\
x(\log_3 2 + 1) + 1 &= 4 \\
x &= \tfrac{3}{1+\log_3 2}
\end{aligned}$$

Rovnice s odmocninou tak většinou mocníme, ale musíme pro kladné sudé mocniny provést zkoušku.

7.2 Lineární a kvadratické rovnice

Tyto dva druhy rovnic se řeší nejsnadněji, protože se po úpravách dostaneme k jednoduchým tvarům rovnic. Lineární rovnice získá podobu

$$ax + b = 0,\, a \neq 0,$$

s řešením $x = -\frac{b}{a}$. Kvadratická rovnice skončí ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,\, a \neq 0$$

s řešeními $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Řešení kvadratické rovnice tedy odpovídá hledání kořenů kvadratického polynomu.

Spočítejme rovnici

$$\frac{2+x}{x-1} = \frac{2x^2+1}{x^2-1} - \frac{3-3x}{x+1} - 4.$$

Definiční obor rovnice je $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Rovnici zjednodušíme, když se zbavíme zlomků, stačí obě strany vynásobit výrazem x^2-1, protože $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Všimněme si, že provádíme ekvivalentní úpravu násobení nenulovým výrazem, protože $x^2-1=0$ jen pro čísla -1, 1, která nejsou v definičním oboru rovnice. Tedy

$$\begin{aligned}
\frac{(2+x)(x-1)(x+1)}{x-1} &= \frac{(2x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} - \frac{(3-3x)(x-1)(x+1)}{x+1} - 4(x^2-1) \\
(2+x)(x+1) &= (2x^2+1) - (3-3x)(x-1) - 4(x^2-1) \\
x^2+3x+2 &= 2x^2+1-3x^2-6x+3-4x^2-4 / -x^2+6x-8
\end{aligned}$$

Převedeme vše na jednu stranu rovnice

$$\begin{aligned}
9x-6 &= 0 \\
x &= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Nyní se ještě snadno přesvědčíme, že nalezené číslo patří do definičního oboru rovnice.

Podobně by se řešilo

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{6} &= \tfrac{8}{x} / \cdot 6x \ \ (\text{def. obor } D = \mathbb{R} - \{0\}) \\ x^2 &= 48 \\ x &= \pm\sqrt{48} (= \pm 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

✎ *Cvičení* 7.1. Vyřešte rovnice:

1. $x^2 - 18 = 0$,
2. $x^2 - 18x = 0$,
3. $x^2 - x - 56 = 0$,
4. $\frac{x^2}{2} - 2x + 2$,
5. $\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{x(x+1)} - \frac{3}{x}$,
6. $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-4}{x+1}$,
7. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$.

Při řešení nezapomínejte na definiční obor rovnice.

✓ *Řešení.* $K = \{\pm\sqrt{18}\}$✓$K = \{0, 18\}$✓$K = \{-7, 8\}$✓$K = \{2\}$ ✓$K = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$✓$K = \{-11, 1\}$✓$K = \{0, 3\}$

7.3 Rovnice s absolutní hodnotou

Jedná se o rovnice, kde se neznámá objevuje v absolutní hodnotě. Tento typ rovnic je oblíben obzvláště mezi tvůrci učebnic, snad proto že z původní rovnice se vyklubou nejméně dvě další s různými definičními obory nebo že definiční obory vzniklých rovnic se hledají pomocí nerovnic.

Z definice absolutní hodnoty

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{pro} \quad x < 0, \end{cases}$$

dostaneme pro výraz $|V(x)|$

$$|V(x)| = \begin{cases} V(x) & \text{pro } x \text{ taková, že} \quad V(x) \geq 0, \\ -V(x) & \text{pro } x \text{ taková, že} \quad V(x) < 0. \end{cases}$$

Vyřešme rovnici

$$|3x - 2| + 1 = |4x - 6|. \tag{7.1}$$

Nejdříve hledáme podmnožiny definičního oboru rovnice, kde jsou výrazy v absolutní hodnotě nezáporné a kde ne. Řešíme tedy nerovnice:

$$\begin{array}{rr} 3x-2 \geq 0 & 4x-6 \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} & x \geq \frac{2}{3} \end{array}$$

Z nerovnic plyne, že výrazy v absolutních hodnotách jsou pro x z intervalu $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ záporné, pro $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ je $3x-2$ kladný a $4x-6$ záporný, pro $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ jsou výrazy záporné. Rozdělíme tak definiční obor rovnice (7.1) na tři intervaly, na kterých výrazy v absolutní hodnotě nemění znaménko. K intervalu $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ přidáme zbylé body $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$, ve kterých jsou výrazy nulové, abychom ošetřili všechny body definičního oboru rovnice (7.1).

Na intervalu $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ se původní rovnice (7.1) chová jako rovnice[2]

$$-(3x-2)+1 = -(4x-6), \tag{7.2}$$

protože absolutní hodnota záporných výrazů otáčí znaménko. Úpravami dojdeme k $x = 3$, což není řešení rovnice (7.2), tedy ani (7.1), protože nepatří do definičního oboru rovnice (7.2).

Na intervalu $\left\langle\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\rangle$ se původní rovnice (7.1) chová jako rovnice

$$(3x-2)+1 = -(4x-6) \tag{7.3}$$

s definičním oborem $\left\langle\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\rangle$. Jejím řešením dostaneme $x = 1$, což patří do definičního oboru rovnice (7.3). Proto je i řešením rovnice (7.1).

Na intervalu $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ se původní rovnice chová jako rovnice

$$(3x-2)+1 = (4x-6) \tag{7.4}$$

s definičním oborem $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Nalezené $x = 5$ je řešením rovnice (7.1), protože patří do definičního oboru rovnice (7.4. Množina řešení původní rovnice bude $K = \{1, 5\}$.

✎ *Cvičení* 7.2. Vyřešte:

1. $5x-2|x+1| = 3$,
2. $|x-10| = 4+2x$,
3. $|5-x|-|x-3| = 2|x+1|$,
4. $|x^2-x|-6 = 0$.

✓ *Řešení.* $K = \left\{\frac{5}{3}\right\}$✓$K = \{2\}$✓$K = \{-2, 0\}$✓$K = \{-2, 3\}$

[2] s definičním oborem $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

7.4 Iracionální rovnice

V těchto rovnicích najdeme neznámou pod odmocninou. Rovnici obvykle umocníme, což je neekvivalentní úprava, a proto na závěr musíme všechna nalezená řešení ověřit zkouškou. Pokud rovnice obsahuje jen jednu odmocninu s neznámou uvnitř, osamostatníme ji na jedné straně a rovnici umocníme. Pokud jsou takové odmocniny dvě, bude pohodlnější převést je na různé strany.

Proto upravíme rovnici

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3} = 1$$

s definičním oborem $\langle -1, \infty)$ na

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 1-\sqrt{2x+3}/^2 \\ x+1 &= 1-2\sqrt{2x+3}+2x+3/-2x-4 \end{aligned}$$

Osamostatníme odmocninu a znovu umocníme

$$\begin{aligned} -x-3 &= -2\sqrt{2x+3}/^2 \\ (x+3)^2 &= 4(2x+3)/-4(2x+3) \\ x^2-2x-3 &= 0 \end{aligned}$$

Nalezená řešení $x_1 = 3$ a $x_2 = -1$ dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} L(3) = \sqrt{3+1}+\sqrt{6+3} = 5 & \qquad P(3) = 1 \\ L(3) &\neq P(3) \\ L(-1) = \sqrt{-1+1}+\sqrt{-2+3} = 1 & \qquad P(-1) = 1 \\ L(-1) &= P(-1) \end{aligned}$$

Kořenem rovnice je tak jen číslo -1.

✎ *Cvičení* 7.3. Vyřešte:

1. $\sqrt{x}+x = 2,$
2. $\sqrt{3x-8}-2 = \sqrt{x-4},$
3. $\sqrt{\frac{7-x}{3+x}}+3\sqrt{\frac{3+x}{7-x}} = 1,$
4. $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}} = 2x+1.$

✓ *Řešení.* $K = \{1\}$✓$K = \{4, 8\}$✓$K = \{-2, 2\}$✓$K = \{-\frac{1}{2}\}$

7.5 Substituce

V rovnicích, kde se vyskytuje proměnná ve složitých (podobných) výrazech, zvažujeme substituci. Místo komplikované rovnice řešíme dvě nebo víc jednodušších.

Vyřešíme rovnici
$$x^4 - x^2 - 6 = 0.$$
Protože se x nachází v sudých mocninách, můžeme zavést substituci $y = x^2$, nahradíme tak **všechna** x pomocí y. Pak řešíme
$$\begin{aligned} y^2 - y - 6 &= 0 \\ y = -2 &\vee y = 3 \end{aligned}$$
Dále budeme počítat řešení původní rovnice dosazením zpátky $y = x^2$. Rovnice
$$x^2 = -2$$
nemá řešení narozdíl od
$$\begin{aligned} x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$
Dospěli jsme k množině řešení $K = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

✎ *Cvičení* 7.4. Spočtěte:

1. $x^6 - 6x^3 - 16 = 0$,
2. $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+3} = x + 4$,
3. $\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4x^2 - 12x + 11$.

✓ *Řešení.* $K = \{-2, 8\}$✓$K = \{-2\}$✓$K = \{1, 2\}$

7.6 Součinový tvar rovnice

S úlohou
$$x^2 - x - 6 = 0$$
jsme se setkali při hledání kořenů polynomu. Pokud ji máme zapsanou ve tvaru
$$(x-3)(x+2) = 0,$$
ihned vidíme, že rovnici splňují čísla -2,3. Takovému zápisu se říká *součinový tvar rovnice*. Využíváme důležité vlastnosti součinu, že k jeho nulovosti stačí, aby aspoň jeden člen byl roven 0.

Ale abychom se k takovým tvarům dostali, je obvykle potřeba rovnice upravit na součin na jedné straně a 0 na druhé straně nejčastěji pomocí vytýkání.

Poznámka 7.4. Rovnice nikdy nedělíme výrazy, které mohu nabývat hodnoty 0 na definičním oboru rovnice. Přišli bychom totiž o její kořeny.

Vyřešme rovnici

$$(x-1)\sqrt{x+6} \quad = \quad 5(x-1).$$

Upravíme ji na součinový tvar

$$(x-1)(\sqrt{x+6}-5) \quad = \quad 0,$$

který vede ke dvěma rovnicím. Z rovnice

$$x-1 \quad = \quad 0$$

dostáváme kořen $x_1 = 1$. Rovnici

$$\sqrt{x+6}-5 \quad = \quad 0$$

jsme vyřešili na začátku kapitoly. Řešení $x_2 = 19$ jsme také ověřili kontrolou. Našli jsme tak množinu řešení

$$K = \{1, 19\}.$$

✎ *Cvičení* 7.5. Vyřešte:

1. $(4x^2-8)(x+\pi) = 0,$
2. $x^2-1 = x-1,$
3. $x(x^2-3x-4) = 0,$
4. $(x-2)(x^2+x) = 2-x,$
5. $x\sqrt{x-8} = 3x,$
6. $xe^x - e^x = 0,$
7. $x^2 \ln^2 x = 2x \ln^2 x$

✓ *Řešení.* $K = \{-\pi, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$✓$K = \{0, 1\}$✓$K = \{-1, 0, 4\}$✓$K = \{2\}$✓$K = \{0, 17\}$✓$K = \{1\}$✓$K = \{1, 2\}$

7.7 Exponenciální a logaritmické rovnice

Tyto rovnice obsahují neznámou v mocnině nebo pod logaritmem. Při řešení používáme ekvivalentních úprav založených na vlastnostech logaritmů a exponenciálních funkcí. Zpravidla v průběhu výpočtu musíme logaritmické rovnice odlogaritmovat (umocnit stranami rovnice stejný základ). Podobně exponenciální rovnice logaritmujeme. Ve složitějších případech uvažujeme nad substitucí.

Spočítejme
$$25^x = 5^{3-x}$$

Rovnici můžeme zkusit bez přemýšlení zlogaritmovat. Základ logaritmu je vhodné volit jako základ exponenciálních členů.

$$\begin{aligned} \log_5 25^x &= \log_5 5^{3-x} \\ x\log_5 25 &= (3-x)\log_5 5 \\ x\log_5 5^2 &= (3-x) \end{aligned}$$

Získáváme tak lineární rovnici

$$\begin{aligned} 2x &= 3-x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Existuje i jiný postup.
$$\begin{aligned} 25^x &= 5^{3-x} \\ 5^{2x} &= 5^{3-x} \end{aligned}$$

Výrazy s mocninou stejného základu se rovnají, právě když se rovnají mocnitelé. Takto se také dostaneme k známé rovnici

$$\begin{aligned} 2x &= 3-x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Pro použití obou postupů je nezbytné, aby obě strany rovnice byly jednočleny nebo alespoň ve tvaru součinu pro logaritmování. Logaritmus součtu bychom totiž obtížně zjednodušovali.

V případě rovnice
$$8\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 1 = 0$$

bychom složitě dostávali na obou jejích stranách jednočleny nebo součin (kdyby rovnice neobsahovala člen 1, bylo by to naopak jednoduché). Tady si ale stačí uvědomit, že $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ a použít substituci:

$$\begin{aligned} 8\cdot(2^x)^2 - 9\cdot 2^x + 1 &= 0 / z = 2^x \\ 8\cdot z^2 - 9z + 1 &= 0 \\ z = 1 &\vee z = \tfrac{1}{8} \\ 2^x = 1 &\vee 2^x = \tfrac{1}{8} \\ x = 0 &\vee x = -3 \end{aligned}$$

Řešení logaritmických rovnic je podobné:

$$\begin{aligned} \log 2x &= 5/10^{\cdots} \\ & \text{(exponujeme se základem 10)} \\ 10^{\log 2x} &= 10^5 \\ 2x &= 10^5 \\ x &= 50000 \end{aligned}$$

Zkusíme vyřešit složitější rovnici, použijeme jak odlogaritmování, tak substituci:

$$\begin{aligned}
x^{3+4\log x} &= 10x^6 \ /\log\dots \\
\log x(3+4\log x) &= \log 10 + 6\log x \ /\text{subst. } y=\log x \\
y(3+4y) &= \log 10 + 6y \\
4y^2+3y &= 1+6y \\
4y^2-3y-1 &= 0 \\
y=1 \quad &\vee \quad y=-\tfrac{1}{4} \\
\log x=1 \quad &\vee \quad \log x=-\tfrac{1}{4} \\
x=10 \quad &\vee \quad x=10^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

✎ *Cvičení* 7.6. Vyřešte:

1. $2^x = 64$,
2. $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$,
3. $4^{x-3} = \frac{1}{4}$,
4. $9^{5-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-2x}$,
5. $4^{x^2-2x+1} = 1$,
6. $4^{x+3} - 4^{x+1} = 60$.

✓ *Řešení.* 6✓-3✓2 ✓4✓1 ✓0

✎ *Cvičení* 7.7. Vyřešte:

1. $\log x = 13$,
2. $\log x + \log x^4 = 5$,
3. $\log(2x-6) = 3$,
4. $\log(x^2+64) = 2$,
5. $x^{7-\log x} = 10^{12}$.

✓ *Řešení.* $K=\{10^{13}\}$ ✓$K=\{10\}$ ✓$K=\{503\}$ ✓$K=\{\pm 6\}$ ✓$K=\{10^3, 10^4\}$

7.8 Goniometrické rovnice

Nejjednodušší goniometrické rovnice mají tvar $\sin x = c$, $\cos x = c$, $\mathrm{tg} x = c$ a řeší se pohledem do tabulky hodnot goniometrických funkcí, popřípadě použitím inverzních funkcí arcsin, arccos, arctg a dohledáním dalších řešení na jednotkové kružnici. Takto najdeme řešení rovnice,

$$\begin{array}{rcl} \cos x & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{7}{6}\pi & \vee & x = \frac{11}{6}\pi \end{array}$$

Kvůli $2\pi-$periodicitě funkce cosinus bude množina všech řešení

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Řešení rovnice

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

nenajdeme v tabulce a musíme použít funkci arcsinus,

$$\begin{array}{rcl} \arcsin(\sin x) & = & \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\ x & = & \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) \\ x & = & -\frac{\pi}{12} \end{array}$$

Podobně jako v předchozí rovnici existuje ještě jedno řešení na intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Pomocí jednotkové kružnice najdeme úhel $\frac{13}{12}\pi$ souměrný podle osy y (se stejnou hodnotou funkce sinus) s prvním řešením. Kvůli $2\pi-$periodicitě funkce sinus bude množina všech řešení

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}, x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Složitější goniometrické rovnice se řeší substitucemi. Rovnice jejich pomocí převedeme na už známé typy rovnic, například

$$\begin{array}{rcl} \sin(3x+2) & = & -\frac{1}{2} / z = 3x+2 \\ \sin z & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Už víme, že řešeními budou $z_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ a $z_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dosadíme zpět a dostaneme lineární rovnice

$$\begin{array}{rcl} 3x+2 & = & \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ x & = & \frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\pi + 2k\pi - 2\right), k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

a

$$\begin{aligned} 3x+2 &= \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi \\ x &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi - 2\right), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dostaneme $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\pi + 2k\pi - 2\right) \vee x = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi - 2\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Další inspiraci k řešení goniometrických rovnic najdeme v úloze

$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{4},$$

kterou můžeme upravit

$$\begin{aligned} \sin^2(x) - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(\sin(x) - \tfrac{1}{2}\right)\left(\sin(x) + \tfrac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

a řešit nakonec dvě jednoduché rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ a $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Rovnici

$$\sin^2(x) + 2\cos x = 2$$

bychom po úpravě $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ řešili substitucí

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2(x) + 2\cos x &= 2 / z = \cos x \\ -z^2 + 2z - 1 &= 0 \\ z &= 1 \\ \cos x &= 1 \end{aligned}$$

Dostáváme $K = \{x \in \mathbb{R}; x = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Cvičení 7.8. Vyřešte rovnice:

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
3. $\sin(5x) = -\frac{1}{2}$,
4. $\cos(2x - \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení.

1. $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
2. $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
3. $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{1}{5}\left(\frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right) \vee x = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right)\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
4. $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

✎ *Cvičení* 7.9. Vyřešte rovnice:

1. $4\cos^3 x = \cos x$,
2. $\cos 2x = 2\sin x$.

✓ *Řešení.*

1. $K = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k\pi\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, také bychom mohli psát šest řešení s periodou 2π,
2. $K = \{x \in \mathbb{R}; x = 0.375 + 2k\pi \vee x = \pi - 0.375 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

7.9 Rovnice s více neznámými

Při hledání parametrů funkce nebo později nejen při počítání parciálních zlomků se setkáváme s rovnicemi s více neznámými. Rovnice s n proměnnými má tvar

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kde levá strana $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a pravá strana $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou výrazy s proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Rovnice je tak úlohou najít tentokrát všechny uspořádané $n-$tice z daného oboru D, pro které nastává rovnost mezi výrazy L a P.

Rovnici

$$x - y = 0$$

budou řešit všechny dvojice stejných reálných čísel, což je množina

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}.$$

Každý předpis funkce jedné proměnné je rovnicí se dvěma proměnnými (často x, y). Pomocí rovnic(e) se také často popisují množiny z $\mathbb{R}^n$. Například řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = 1$$

jsou body jednotkové kružnice.

Rovnice s více proměnnými se obvykle vyskytují v soustavách. Když budeme hledat společné body kružnice popsané rovnicí

$$x^2 + y^2 \quad = \quad 1$$

a její sečny

$$y \quad = \quad x - \tfrac{1}{2},$$

jedná se o dvojice (x_k, y_k), které leží na kružnici (splňují $x^2 + y^2 = 1$) a zároveň leží na sečně (splňují $y = x - \frac{1}{2}$). Mezi rovnice by se tedy dala psát spojka $\wedge$. Obecně se řešením soustavy rovnic o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumí každá uspořádaná $n-$tice

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ čísel z daného definičního oboru M, které splňují zároveň všechny rovnice soustavy.

S jednotlivými rovnicemi soustavy můžeme provádět stejné ekvivalentní úpravy jako s rovnicemi s jednou proměnnou, což znamená:

- ☛ Nahrazení rovnice rovnicí s ní ekvivalentní. (Použijeme ekvivalentní úpravy na jednotlivé rovnice.)

Jako vždy se budeme snažit převést složitější úlohy na jednodušší. Soustavy rovnic s více neznámými budeme postupně převádět na řešení rovnic s jednou neznámou. K tomu používáme dva základní postupy:

- ☛ Nahrazení rovnice součtem této rovnice s jinou rovnicí soustavy.
- ☛ Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice do druhé.

Náš příklad je typický pro dosazování neznámé do rovnice

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ y &= x-\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Z první rovnice získáme rovnici s jednou neznámou když do ní za y dosadíme z druhé rovnice výraz obsahující pouze x, ale rovný y

$$x^2+\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

odtud dostaneme k řešení kvadratickou rovnici

$$2x^2-x-\tfrac{3}{4} = 0.$$

Najdeme řešení

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4},$$

jejich dosazením do druhé rovnice soustavy dostaneme k nim příslušné

$$y_{1,2}=\frac{-\frac{1}{4}\pm\sqrt{7}}{4}.$$

Řešeními soustavy rovnic jsou tedy dvojice

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4},\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\right) \text{ a } (x_2,y_2)=\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4},\frac{-1-\sqrt{7}}{4}\right).$$

✎ *Cvičení* 7.10. Vyřešte soustavu:

$$\begin{aligned} 4x+\ 2y &= 4 \\ x^2+\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

✓ *Řešení.* $K = \{(2, -2)\}$

Často se budeme setkávat se soustavami n lineárních rovnic s n neznámými. Řešíme je postupným převáděním na soustavy menšího počtu rovnic s menším počtem neznámých *Gaussovou eliminační metodou*. Využijeme úpravy, kdy nahrazujeme jednu z rovnic součtem této rovnice s jinou, a snažíme se tak zbavit na chvíli jedné z proměnných:

$$
\begin{array}{rrrl}
x+ & 3y = & 5 & /(-4) \\
4x+ & 2y = & 5 & \\
\hline
-4x- & 12y = & -20 & \\
4x+ & 2y = & 5 & \text{(sečteme rovnice)} \\
\hline
 & -10y = & -15 & \\
 & y = & \frac{3}{2} & \text{(dosadíme za } y \text{ do původní rovnice)} \\
x+ & 3 \cdot \frac{3}{2} = & 5 & \\
 & x = & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Poznámka 7.5. Při řešení například soustavy tří rovnic o třech neznámých provádíme podobný postup, jen nejdříve vytvoříme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

✎ *Cvičení* 7.11. Spočítejte:

$$
\begin{array}{rrr}
x+ & 3y = & 4 \\
2x+ & 2y = & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
4x+ & 2y = & 5 \\
6x- & 4y = & 2
\end{array}
$$

✓ *Řešení.* $K = \left\{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}$✓$K = \left\{\frac{6}{7}, \frac{11}{14}\right\}$

7.10 Grafické řešení rovnic

K lepšímu pochopení rovnic může pomoci i znalost grafického řešení. Strany $L(x)$ a $P(x)$ rovnice $L(x) = P(x)$ budeme považovat za pravé strany předpisů dvou funkcí. V bodech řešení rovnice x_k mají tyto funkce stejné hodnoty y_k,

$$L(x_k) = P(x_k) = y_k.$$

Grafy obou funkcí procházejí stejným bodem roviny $[x_k, y_k]$, tedy se protínají. Pokud jsme schopni nakreslit grafy funkcí s předpisy $y = L(x)$ a $y = P(x)$ na definičním oboru rovnice, řešením rovnice budou $x-$ové souřadnice průsečíků jejich grafů.

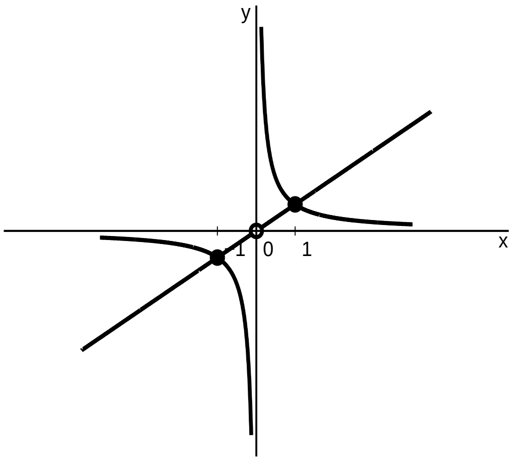
Poznámka 7.6. Všimněme si, že grafy pro rovnice vzniklé ekvivalentními úpravami mají průsečíky se stejnými $x-$ovými souřadnicemi, i když s jinými $y-$ovými hodnotami.

Poznámka 7.7. Často převádíme rovnice na tvar $L(x) = 0$. V tomto případě hledáme průsečíky grafu funkce s předpisem $y = L(x)$ s konstantní funkcí $y = 0$, tedy s osou x.

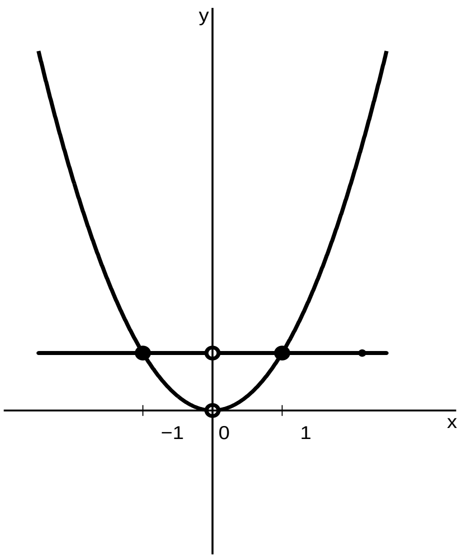
Zkusme vyřešit graficky rovnici

$$\frac{1}{x} = x.$$

Stačí jen nakreslit grafy funkcí s předpisy $y = \frac{1}{x}$ a $y = x$ s definičním oborem $\mathbb{R} - \{0\}$.



Obrázek 7.1: Grafické řešení rovnice $\frac{1}{x} = x$



Obrázek 7.2: Grafické řešení rovnice $x^2 = 1$ na definičním oboru $\mathbb{R} - \{0\}$

Po ekvivalentní úpravě můžeme rovnici zapsat

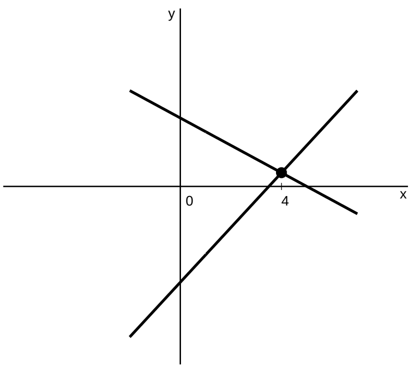
$$1 = x^2.$$

Tuto rovnici musíme řešit na definičním oboru $\mathbb{R}-\{0\}$, aby byla ekvivalentní s původní rovnicí, což je také naznačeno na Obrázku 7.2. Tentokrát uvažujeme funkce s předpisy $y=1$ a $y=x^2$ s definičním oborem $\mathbb{R}-\{0\}$. Grafické řešení nám dá zase množinu kořenů $K=\{-1,1\}$.

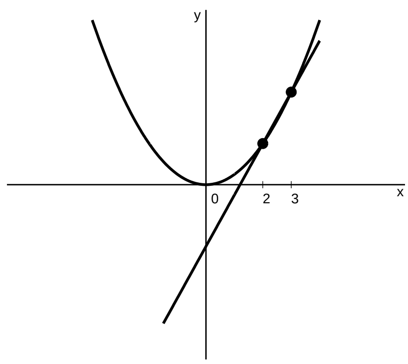
✎ *Cvičení* 7.12. Zkuste graficky znázornit řešení rovnic:

1. $5-x=2x-7$,
2. $x^2=5x-6$,
3. $x^2-4x+5=0$.
4. $x^3-3x=x$

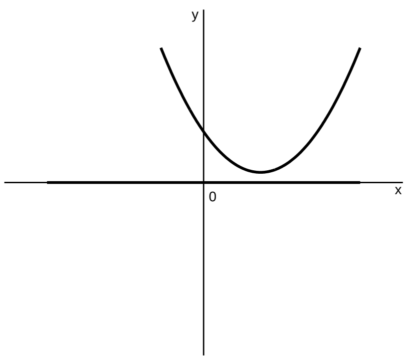
✔ *Řešení.*



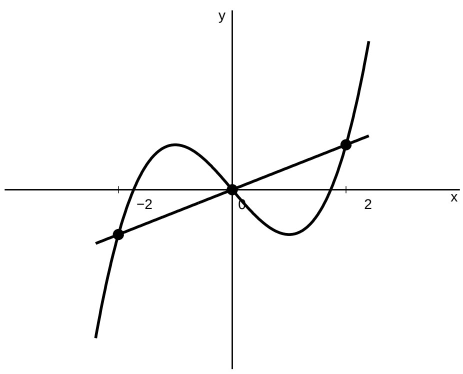
Grafické řešení rovnice $5-x=2x-7$



Grafické řešení rovnice $x^2=5x-6$



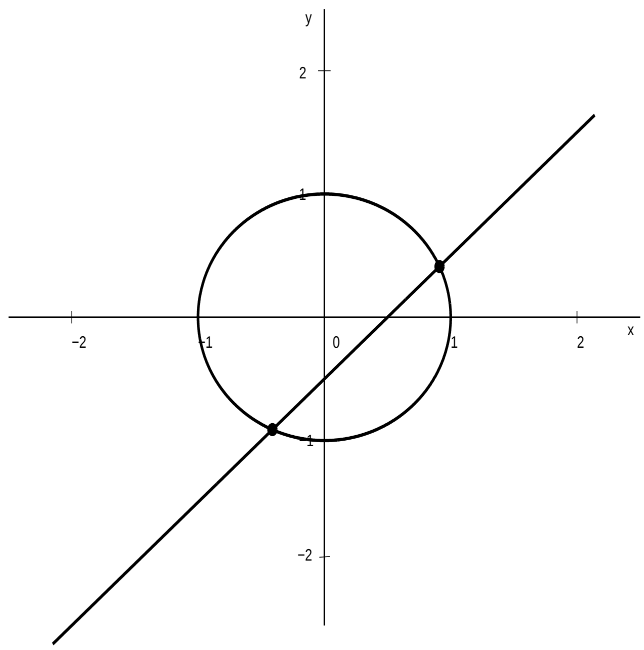
Grafické řešení rovnice $x^2-4x+5=0$



Grafické řešení rovnice $x^3-3x=x$

V případě soustav rovnic s více proměnnými budeme také hledat průsečíky grafů určených jednotlivými rovnicemi. Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x - y - \tfrac{1}{2} &= 0, \\ y^2 + x^2 &= 1. \end{aligned}$$



Obrázek 7.3: Grafické řešení soustavy rovnic

Rovnici

$$x - y - \tfrac{1}{2} = 0$$

můžeme převést na funkční předpis

$$y = x - \tfrac{1}{2}$$

a vykreslit graf této funkce (Obrázek 7.3).

Z některých rovnic se dvěma proměnnými sice funkční předpis nedostaneme, ale můžeme znázornit alespoň množinu dvojic čísel, která ji splňují. Příkladem mohou být kuželosečky, třeba kružnice

$$y^2 + x^2 = 1.$$

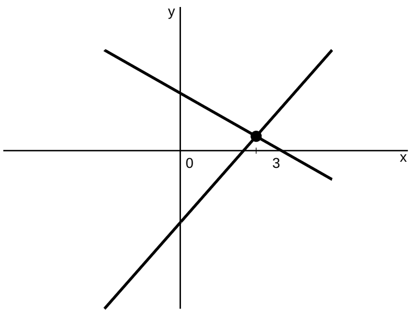
Obě souřadnice (tentokrát dvojice čísel) společných bodů (průsečíků) budou řešeními soustavy rovnic.

Poznámka 7.8. Z příkladu je vidět, že pomocí grafického řešení (soustav) rovnic získáme spíše představu o poloze a počtu řešení než o přesných hodnotách.

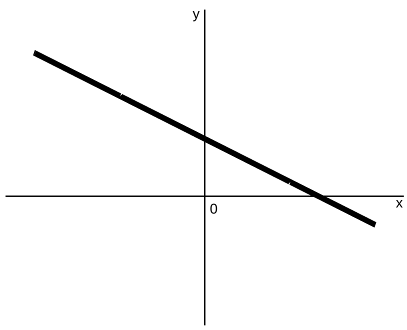
✎ *Cvičení* 7.13. Vyřešte graficky i početně následující soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 4\\ 2x-y &=& 5 \end{array},\quad \begin{array}{rcl} x+y &=& 4\\ 2x+2y &=& 8 \end{array},\quad \begin{array}{rcl} x+y &=& 4\\ 2x+2y &=& 6 \end{array},\quad \begin{array}{rcl} x^2 &=& y\\ y-5 &=& 0 \end{array}.$$

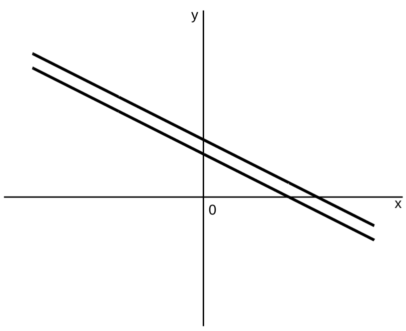
✓ *Řešení.* $K=\{(3,1)\}$✓$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=4-x\}$✓$K=\emptyset$✓$K=\{(-\sqrt{5},5),(\sqrt{5},5)\}$



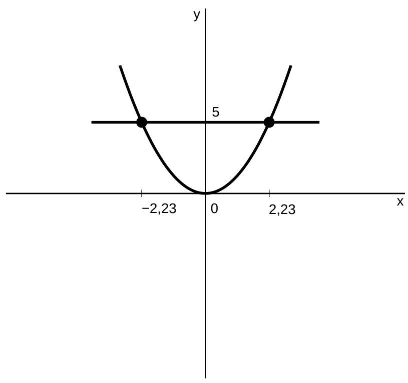
Grafické řešení první soustavy rovnic



Grafické řešení druhé soustavy rovnic



Grafické řešení třetí soustavy rovnic



Grafické řešení čtvrté soustavy rovnic

8 | Nerovnice

S rovnicemi úzce souvisejí nerovnice. V případě rovnic s jednou neznámou jsme hledali body x_k z definičního oboru, ve kterých docházelo k rovnosti stran $L(x) = P(x)$. Nyní se zaměříme i na zbylé body. Řešením nerovnice $L(x) > P(x)$ je množina všech x_k z definičního oboru nerovnice, pro která je výrok $L(x_k) > P(x_k)$ pravdivý. Mohou se samozřejmě objevit i znaky $<, \leq, \geq$.

Poznámka 8.1. I nerovnice můžeme brát jako zjednodušené zápisy množin.

Řešení nerovnic bude také začínat zjednodušujícími úpravami, tentokrát téměř výhradně ekvivalentními. Ekvivalentní úpravou nerovnice dostaneme nerovnici se stejnými řešeními, jako měla ta původní. Patří mezi ně:

- nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná na celém definičním oboru (úpravy na jednotlivých stranách nerovnice),

$$x^2 - x < 0 \iff x(x-1) < 0.$$

- přičtení stejného čísla nebo výrazu, který je definován na celém definičním oboru nerovnice, k oběma stranám nerovnice,

$$x^2 - 2x > x \iff x^2 - x > 0.$$

- vynásobení obou stran nerovnice týmž **kladným** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován na celém definičním oboru nerovnice,

$$\frac{x^2 - 2x}{1 + x^2} \geq \frac{x}{1 + x^2} \iff x^2 - 2x \geq x.$$

Pokud jsou obě strany nerovnice **nezáporné na celém definičním oboru nerovnice** (např. $2^x \cdot 3^{x+1} \geq 81$), můžeme provádět následující ekvivalentní úpravy:

- umocnění nebo odmocnění obou stran kladnou mocninou, „exponování”,

$$4\log(x+5) \geq 6 \Leftrightarrow 10^{4\log(x+5)} \geq 10^6.$$

K dispozici máme ještě dva typy úprav, při kterých dochází k převrácení znaku nerovnosti:

- vzájemná výměna stran nerovnice spolu s obrácením znaku nerovnosti,

$$x^2 - x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \geq x^2 - x.$$

- Vynásobení obou stran nerovnice týmž **záporným** číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován na celém definičním oboru nerovnice, spolu s převrácením znaku nerovnosti,

$$\frac{x^2 - 2x}{-4} \geq \frac{x}{-4} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x \leq x,$$

(násobíme -4).

Úpravy vyzkoušíme na jednoduchém příkladu lineární nerovnice v oboru $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{3}x + 5(4 - x) &\geq 2(4 - x) / \cdot 3 \\
5(x + 12 - 3x) &\geq 6(4 - x) \\
-10x + 60 &\geq 24 - 6x / + 10x - 24 \\
36 &\geq 4x \\
9 &\geq x \\
x &\leq 9
\end{aligned}$$

Nerovnici tak vyhovují všechna čísla z intervalu $K = (-\infty, 9\rangle$.

Vyřešme nerovnici

$$\tfrac{x-1}{x-2} \leq 3.$$

Definiční obor rovnice je $\mathbb{R} - \{2\}$. Na rozdíl od rovnice zde nesmíme násobit obě strany výrazem $x - 2$, protože není na celém definičním oboru kladný. (U rovnic je ekvivalentní úpravou násobení obou stran výrazem nenulovým na definičním oboru, u nerovnic je ekvivalentní úpravou násobení obou stran výrazem kladným na definičním oboru.) Jedna z možností řešení je odečíst od obou stran rovnice výraz na pravé straně a převést levou stranu na společného jmenovatele, což budou ekvivalentní úpravy.

$$\begin{aligned}
\tfrac{x-1}{x-2} - 3 &\leq 0 \\
\tfrac{x-1-3x+6}{x-2} &\leq 0 \\
\tfrac{-2x+5}{x-2} &\leq 0 \\
\tfrac{2x-5}{x-2} &\geq 0
\end{aligned}$$

Podíl se chová stejně jako součin. Pokud jsou čitatel i jmenovatel zároveň kladné, nebo záporné, je podíl kladný, jinak záporný. To od nás vyžaduje řešit dvě soustavy lineárních nerovnic,

$$\begin{array}{rcl}
2x - 5 \geq 0 & & 2x - 5 \leq 0 \\
x - 2 > 0 & & x - 2 < 0 \\
x \geq \tfrac{5}{2} & & x \leq \tfrac{5}{2} \\
x > 2 & & x < 2 \\
x \geq \tfrac{5}{2} & \vee & x < 2
\end{array}$$

Tedy $K = \mathbb{R} - \langle 2, \frac{5}{2})$.

Při řešení rovnice s 0 na jedné straně

$$\frac{2x-5}{x-2} \quad \geq \quad 0$$

uvažujeme pouze znaménko podílu, to je stejné jako u součinu. Řešení by se tak shodovalo s řešením nerovnice

$$(2x-5)(x-2) \quad \geq \quad 0$$

na stejném definičním oboru $\mathbb{R} - \{2\}$. Můžeme vyjít z vlastností kvadratické funkce s kladným koeficientem u kvadratického členu, ta je záporná pouze mezi případnými kořeny. V našem případě máme kořeny $\{2, \frac{5}{2}\}$, znovu tak dostáváme řešení kvadratické nerovnice $K = \mathbb{R} - \langle 2, \frac{5}{2})$. Bod 2 není řešením, protože nepatří do definičního oboru nerovnice.

I řešení nerovnic $L(x) > P(x)$ si můžeme graficky znázornit. Hledáme intervaly, na kterých je graf funkce s předpisem $y = L(x)$ nad grafem funkce s předpisem $y = P(x)$ na definičním oboru nerovnice. Pokud jsou obě funkce spojité, stačí najít průsečíky grafů těchto funkcí. V nich může nastat změna, kdy se graf jedné funkce dostane nad graf druhé. Mimo průsečíky ke změně ve vzájemné poloze grafů dojít nemůže. Stačí pak podle hodnot obou funkcí v jednom bodě z intervalu ohraničeného průsečíky zjistit, který z grafů je na tomto intervalu nad druhým, a k jaké nerovnosti tedy dochází. Tento princip se bude hojně používat při vyšetřování průběhu funkce.

Jen v bodech nespojitosti může graf funkce přeskočit přes druhý, aniž by se přitom protnuly. Uvažujeme pak intervaly oddělené průsečíky i body nespojitosti.

Tohoto principu využívá metoda nulových bodů. Uvažujeme speciální tvar nerovnice $L(x) > 0$ (na který se dá každá nerovnice převést). Řešením je obvykle množina sjednocených intervalů. Tyto intervaly jsou odděleny od intervalů, kde $L(x) < 0$ body x_k, kde $L(x_k) = 0$, nebo body, které nepatří do definičního oboru rovnice, například 0 nepatří do definičního oboru $\frac{1}{x} > 0$. Stačí tak řešit místo nerovnice rovnici, body a případné díry v definičním oboru nám určí kraje intervalů, kde $L(x) > 0$ nebo $L(x) < 0$. Pokud dosadíme do $L(x)$ bod z nalezeného intervalu, zjistíme, jak se chovají všechny body tohoto intervalu najednou.

Metoda nulových bodů je podepřena následující větou

Věta 8.1. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Nechť $a, b \in J$, $a < b$ a $z \in \mathbb{R}$ leží mezi $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ takové, že $f(c) = z$.

To znamená, že spojitá funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$. Pro nás nejzajímavější případ nastává, když jedna z hodnot $f(a)$, $f(b)$ je kladná a druhá záporná, pak spojitá funkce f protíná mezi body a a b osu x (nacházíme c tak, že $f(c) = 0$).

Vyřešme nerovnici metodou nulových bodů,

$$\frac{x-1}{x-2} \quad \leq \quad 3.$$

Definiční obor rovnice je $\mathbb{R} - \{2\}$. Nerovnici převedeme na tvar $L(x) \leq 0$.

$$\tfrac{x-1}{x-2} - 3 \quad \leq \quad 0.$$

Označíme $L(x) = \frac{x-1}{x-2} - 3$ pro pozdější použití. Nulové body pak nalezneme řešením rovnice

$$\tfrac{x-1}{x-2} - 3 \quad = \quad 0.$$

Strany rovnice můžeme násobit výrazem $x-2$, který je nenulový na definičním oboru rovnice $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned} (x-1) - 3(x-2) &= 0 \\ 2x - 5 &= 0 \\ x &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Řešení rovnice a bod nespojitosti $\{2, \frac{5}{2}\}$, nám dělí množinu $\mathbb{R}$ na tři intervaly, které celé buď budou nebo nebudou řešením nerovnice. Z každého intervalu tak stačí vybrat jedno číslo a zkusit, jestli řeší nerovnici.

$$\begin{array}{ccc} I_1 = (-\infty, 2) & I_2 = (2, \frac{5}{2}\rangle & I_3 = (\frac{5}{2}, \infty) \\ L(0) = -\frac{5}{2} & L\left(\frac{9}{4}\right) = 2 & L(3) = -1 \\ 0 \text{ je řešení} & \frac{9}{4} \text{ není řešení} & 3 \text{ je řešení} \end{array}$$

Řešením jsou první a třetí interval, tedy $K = I_1 \cup I_3 = \mathbb{R} - \langle 2, \frac{5}{2})$.

✎ *Cvičení* 8.1. Vyřešte nerovnice:

1. $\frac{x-6}{2}\frac{x-1}{3} > \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3}$,
2. $\frac{x+2}{x-3} > 0$,
3. $2 < \frac{3-x}{x+3} > 0$,
4. $2x - \frac{5x+3}{x+7} \geq 1$.

✓ *Řešení.* $\{\}$✓$\mathbb{R} - \langle -2, 3\rangle$✓$(-3, -1)$✓$(-7, -5) \cup \langle 1, \infty)$

✎ *Cvičení* 8.2. Vyřešte nerovnice:

1. $|3x+2| > 3$,
2. $|x+1| - |x-1| \leq 0$.

✓ *Řešení.* $K = \mathbb{R} - \left[-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right]$✓$K = (-\infty, 0\rangle$.

✎ *Cvičení* 8.3. Vyřešte nerovnice:

1. $3^x > 27$,
2. $4^x \leq 64$,

3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} \geq 125$,

4. $25^x \leq 6 \cdot 5^x - 5$,

5. $4^{x^2-2x+1} \leq 1$.

✓ *Řešení.* $K = (3, \infty)$ ✓$K = (-\infty, 3)$ ✓$K = (-\infty, -6\rangle$ ✓$K = \langle 0, 1\rangle$✓$K = \{1\}$

✎ *Cvičení* 8.4. Vyřešte nerovnice:

1. $\log_3 x > -3$,

2. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$,

3. $\log(x+3) < -2$,

4. $\log(2x-6) < 2$,

5. $\log(x^2-4) < 1$.

✓ *Řešení.* $K = (3^{-3}, \infty)$ ✓$K = \langle \frac{1}{16}, \infty)$ ✓$K = (-3, -2.99)$✓$K = (3, 53)$✓$K = (-\sqrt{14}, -2) \cup (2, \sqrt{14})$

✎ *Cvičení* 8.5. Vyřešte nerovnice:

1. $\cos x \leq -1$,

2. $\sin x > \frac{1}{2}$,

3. $\cos(2x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

4. $\sin(4x - \frac{\pi}{6}) \geq \frac{1}{2}$.

✓ *Řešení.*

1.
$$K = \{x \in \mathbb{R}; x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

2.
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle,$$

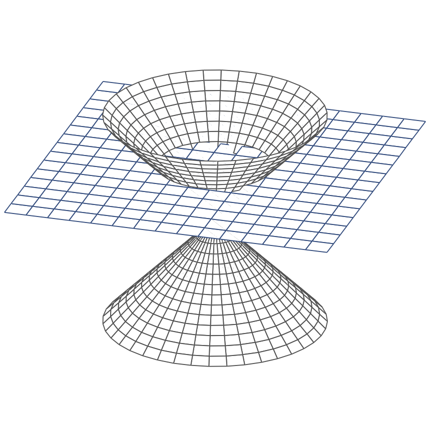
3.
$$K = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{7}{12}\pi + k\pi \right\rangle,$$

4.
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}, \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right\rangle.$$

9 | Kuželosečky

Zatímco jeden velikán vojenské historie překračoval Alpy, nemenší velikán matematiky deptal Římany na opačném konci Itálie. Ačkoliv špatně opevněné Syrakusy dlouho odolávaly obléhání Římanů jen díky technickým vynálezům Archiméda, ten nezanedbával v těžké době ani studium kuželoseček, naposledy pak kružnic. Proto bychom ani my neměli nevzpomenout kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu. Jak jejich souhrnný název napovídá, vzniknou na řezu kuželu rovinou (Obrázek 9.1). Společné mají i to, že jsou určeny kvadratickými rovnicemi se dvěma neznámými.

Poznámka 9.1. Nás budou zajímat kuželosečky jako rovnice, kdežto Archimédes počítal spíše obsah plochy vymezené kuželosečkami. Zlí jazykové dokonce tvrdí, že Archimédes byl výpočty zaujat více než obranou města.



Obrázek 9.1: Řez kuželu rovinou

9.1 Definice kuželoseček

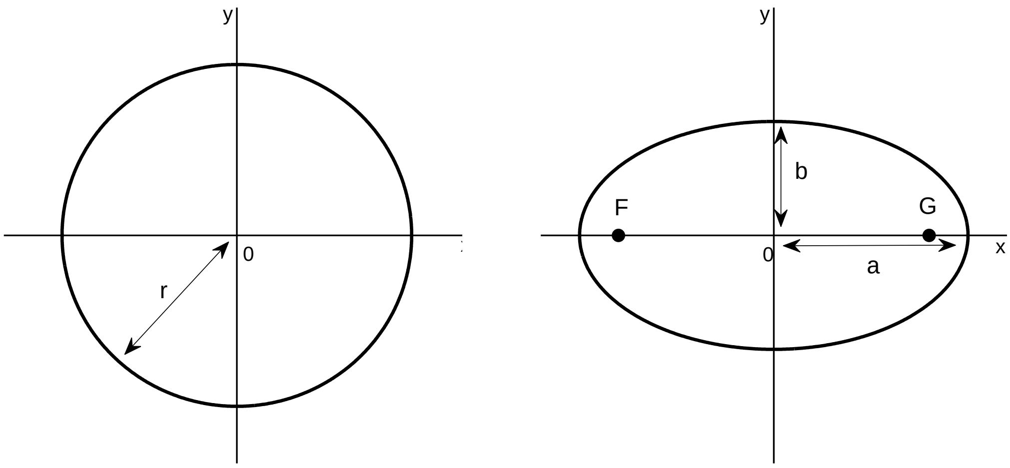
Definice 9.1. V rovině $\mathbb{R}^2$ je dán bod S a kladné číslo $r \in \mathbb{R}$. *Kružnice* je množina bodů X roviny, které mají od bodu S vzdálenost r. Zapisujeme

$$|SX| = r.$$

Poznámka 9.2. Vzdáleností bodů $X_1 = [x_1, y_1]$ a $X_2 = [x_2, y_2]$ rozumíme délku úsečky spojující tyto body, tedy $|X_1X_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Takto počítané vzdálenosti se říká *eukleidovská.*

Nejprve budeme uvažovat rovnice kuželoseček se středem, popřípadě vrcholem v počátku $S = [0, 0]$. Body kružnice zapíšeme pomocí *středové rovnice*

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Kružnice určená rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$

Elipsa určená rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Obrázek 9.2: Kružnice a elipsa

Definice 9.2. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dány dva různé body F a G a kladné číslo $r \in \mathbb{R}$, $r > |FG|$. *Elipsa* je množina bodů X roviny, které mají stejný součet vzdáleností od F a G, a to r. Zapisujeme

$$|FX| + |GX| = r.$$

Body F a G nazýváme *ohniska elipsy.*

Body elipsy se středem $S = [0, 0]$ zapíšeme pomocí středové rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Definice 9.3. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dány bod F a přímka d rovnoběžná s osou x nebo y, která neprochází F. *Parabola* je množina bodů X roviny, které mají stejnou vzdálenost od F a d. Zapisujeme

$$|FX| = |dX|.$$

Bod F nazýváme *ohnisko paraboly.*

Parabolu, kterou známe z kvadratických funkcí, nám bude nejvíce připomínat rovnice

$$x^2 = 2py,$$

pro přímku d určenou funkcí $y = -\frac{p}{2}$ a ohnisko $F = [0, \frac{p}{2}]$.

Dále můžeme narazit na rovnice

$$x^2 = -2py,$$

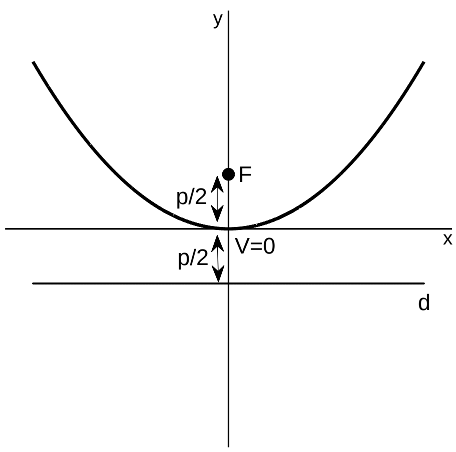
pro přímku d určenou funkcí $y = \frac{p}{2}$ a ohnisko $F = [0, -\frac{p}{2}]$,

$$y^2 = 2px,$$

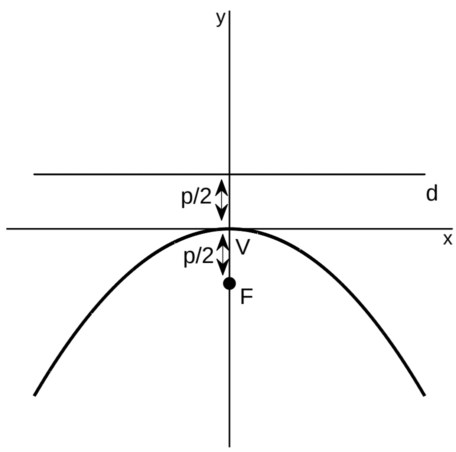
pro přímku d určenou $x = -\frac{p}{2}$ a ohnisko $F = [\frac{p}{2}, 0]$,

$$y^2 = -2px,$$

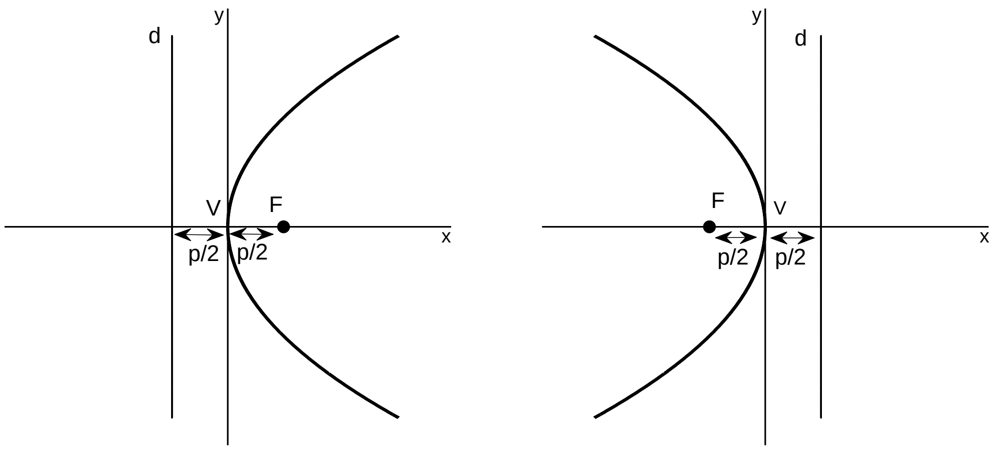
pro přímku d určenou funkcí $x = \frac{p}{2}$ a ohnisko $F = [-\frac{p}{2}, 0]$. Všude předpokládáme $p > 0$.



Parabola určená rovnicí $x^2 = 2py$



Parabola určená rovnicí $x^2 = -2py$



Parabola určená rovnicí $y^2 = 2px$ Parabola určená rovnicí $y^2 = -2px$

Obrázek 9.3: Paraboly

Poznámka 9.3. Parabola má ohromný význam ve fyzice, mimo jiné všechny hozené nebo vystřelené předměty se pohybují po parabolické trajektorii[1].

Nakonec vynálezcem parního děla je právě Archimédes. Jeho dělo bylo schopno podle výpočtů střílet na vzdálenost 150 metrů projektily velikosti bowlingové koule naplněné hořlavou ropou. Římské lodě pak velmi ochotně hořely. Dříve se myslelo, že k zapálení lodí byla použita soustava zrcadel, samozřejmě v parabolickém rozestavení, ale moře leží na východ od Syrakus a slunce ráno ještě nemá dost síly.

Definice 9.4. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dány odlišné body F a G. *Hyperbola* je množina bodů X roviny, které mají stejný rozdíl vzdáleností od F a G. Zapisujeme

$$|FX| - |GX| = k.$$

Body F a G nazýváme *ohniska hyperboly.*

Pro $F = [-e, 0]$ a $G = [e, 0]$, $e > 0$, zapíšeme středovou rovnici hyperboly

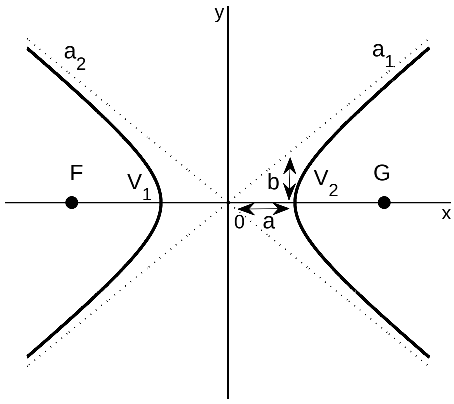
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a^2 + b^2 = e^2$. Asymptoty, tedy přímky, ke kterým se ramena hyperboly přibližují, jsou určeny funkčními předpisy $a_1 : y = \frac{b}{a}x$, a $a_2 : y = -\frac{b}{a}x$. Hyperbola může mít ohniska $F = [0, -e]$ a $G = [0, e]$, $e > 0$, její středovou rovnici pak zapíšeme

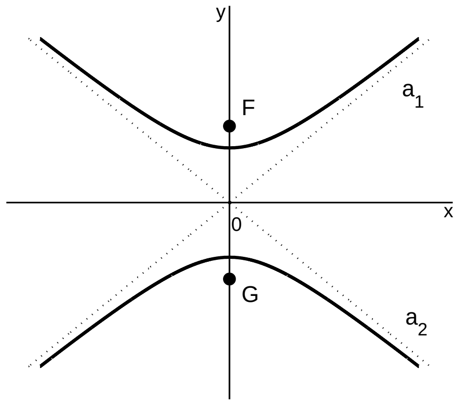
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a^2 + b^2 = e^2$. Asymptoty jsou určeny stejnými funkčními předpisy $a_1 : y = \frac{b}{a}x$, a $a_2 : y = -\frac{b}{a}x$.

[1] pokud zanedbáme tření



Hyperbola určená rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbola určená rovnicí $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Obrázek 9.4: Hyperboly

Kuželosečky nemusejí mít střed nebo vrchol v bodě $[0, 0]$, ale i středové rovnice takových snadno zapíšeme. Podobně jako umíme posunout graf funkce o požadovanou vzdálenost po ose x nebo y, posuneme i graf kuželosečky. Například graf funkce $y = (x-1)^3 - 2$ získáme posunutím grafu $y = x^3$ o 1 doprava a o 2 dolů, tedy bod $[0, 0]$ do bodu $[1, -2]$. Přepišme si ještě funkční předpis na rovnici $y + 2 = (x-1)^3$, protože v takovém tvaru se budou vyskytovat středové rovnice kuželoseček. Stejně kružnici $x^2 + y^2 = 1$ se středem $[0, 0]$ posuneme do středu $[1, -2]$, stačí psát $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$.

Obecně zapíšeme středovou rovnici kružnice se středem $[m, n]$ a poloměrem r

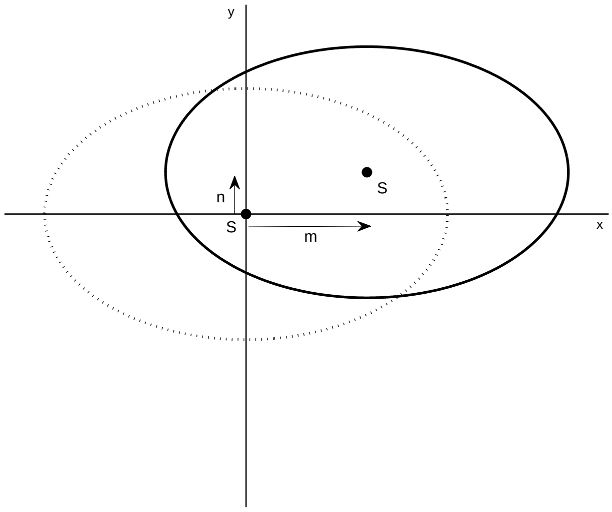
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Setkáme se i s obecným tvarem rovnice[2]

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0.$$

Podobně se změní středové rovnice dalších kuželoseček se středem nebo vrcholem $[m, n]$.

[2]vznikne po umocnění



Obrázek 9.5: Posunutí elipsy se středem $[0,0]$ do středu $[m,n]$

Rovnice kuželoseček se středem nebo vrcholem v bodě $[m,n]$ najdeme v tabulce 9.1.

kuželosečka	středová rovnice	obecná rovnice
kružnice	$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$	$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0.$
elipsa	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+rx+sy+t=0,\ pq>0$
parabola	$(x-m)^2=2p(y-n)$	$x^2+rx+sy+t=0$
	$(x-m)^2=2p(y-n)$	$x^2+rx+sy+t=0$
	$(y-n)^2=2p(x-m)$	$y^2+rx+sy+t=0$
	$(y-n)^2=-2p(x-m)$	$y^2+rx+sy+t=0$
hyperbola	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+rx+sy+t=0,\ pq<0$
	$-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+rx+sy+t=0,\ pq<0$

Tabulka 9.1: Rovnice kuželoseček

Poznámka 9.4. Stejně se posunou i asymptoty hyperboly $a_1 : (y-n) = \frac{b}{a}(x-m)$, a $a_2 :$ $(y-n) = -\frac{b}{a}(x-m)$.

Obecné tvary kuželoseček už se od sebe příliš neliší, a tak je užitečné umět je převést na středový tvar. Zjistíme pak, o kterou kuželosečku se jedná, a kde má střed nebo vrchol. Rovnice jsou kvadratické, a proto využijeme úprav na úplné čtverce.

Zjistíme, jestli a jakou kuželosečku určuje rovnice

$$9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 \quad = \quad 0.$$

Rovnice obsahuje dva kvadratické dvojčleny s proměnnými x a y

$$(9x^2 - 54x) + (25y^2 - 100y) - 44 \quad = \quad 0.$$

Úpravu na úplné čtverce umíme provést pro kvadratický člen s koeficientem 1, proto nejdříve vytkneme

$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 - 4y) - 44 \quad = \quad 0.$$

Nyní provedeme úpravu na úplné čtverce:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 6x + 9 - 9) + 25(y^2 - 4y + 4 - 4) - 44 &= 0 \\ 9(x-3)^2 - 81 + 25(y-2)^2 - 100 - 44 &= 0 \\ 9(x-3)^2 + 25(y-2)^2 &= 225 / : 225 \\ \tfrac{(x-3)^2}{25} + \tfrac{(y-2)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Jedná se tedy o elipsu se středem $[3, -2]$.

✎ *Cvičení* 9.1. Najděte střed kuželoseček určených rovnicí:

1. $x^2 + 4y^2 - 8x - 8y - 5 = 0$,
2. $2x^2 - 9y^2 - 12x + 36y - 18 = 0$,
3. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y - 52 = 0$.

✓ *Řešení.* [4, 1]✓[3, 1]✓není kuželosečka

9.2 Vzájemná poloha kuželoseček a dalších objektů

U funkcí jsme mohli zjistit, zda libovolný bod leží na jejím grafu jeho dosazením do funkčního předpisu. Stejně zjistíme, jestli daný bod leží na kuželosečce. Pokud neleží, nastane jedna ze dvou možností, bod leží uvnitř nebo vně kuželosečky. Když rovnici kuželosečky zapíšeme v obecném tvaru $L(x, y) = 0$, pak bod $[x_1, y_1]$ leží na kuželosečce, jestliže

$$L(x_1, y_1) = 0.$$

Nerovnice
$$L(x_1, y_1) < 0$$
platí pro bod ležící uvnitř,
$$L(x_1, y_1) > 0$$
pro bod vně kuželosečky.

Uvažujme elipsu
$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$
a body $[3, \sqrt{2}-2]$, $[2, 1]$ a $[-1, -1]$. Odečtením 1 od obou stran rovnice dostaneme obecný tvar
$$L(x, y) = \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{4} - 1 = 0.$$
Nyní stačí dosazovat souřadnice jednotlivých bodů
$$L(3, \sqrt{2}-2) = \frac{(3-1)^2}{8} + \frac{(\sqrt{2})^2}{4} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0,$$
$$L(2, 1) = \frac{(2-1)^2}{8} + \frac{(1+2)^2}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{9}{4} - 1 = \frac{11}{8} > 0,$$
$$L(-1, -1) = \frac{(-1-1)^2}{8} + \frac{(-1+2)^2}{4} - 1 = \frac{4}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0.$$
Tedy bod $[3, \sqrt{2}-2]$ leží na, bod $[2, 1]$ vně a bod $[-1, -1]$ uvnitř elipsy.

Naučíme se také určit vzájemnou polohu kuželosečky a přímky. Znamená to určit, kolik společných bodů mají tyto křivky. Najít můžeme jeden, dva nebo žádný. Souřadnice společných bodů neboli průsečíků musí splňovat rovnice jak kuželosečky, tak přímky. Budeme tedy řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou ale snadno převedeme na kvadratickou rovnici.

Najděme průsečíky elipsy a přímky daných rovnicemi
$$\begin{aligned} \tfrac{(x-2)^2}{2} + \tfrac{(y-4)^2}{4} &= 1 \\ y &= 2x+3 \end{aligned}$$
Dosadíme $y = 2x+3$ do rovnice elipsy
$$\begin{aligned} \tfrac{(x-2)^2}{2} + \tfrac{(2x+3-4)^2}{4} &= 1 \\ \tfrac{x^2-4x+4}{2} + \tfrac{4x^2-4x+1}{4} &= 1 \\ \tfrac{3}{2}x^2 - 3x + \tfrac{5}{4} &= 0 \\ x_{1,2} = \tfrac{3\pm\sqrt{9-\frac{15}{2}}}{3} &= 1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Nyní dopočítáme $y-$ové souřadnice průsečíků dosazením nalezených x do libovolné z rovnic, a tedy řešením jedné rovnice o jedné neznámé.

$$y_1 = 2x_1 + 3 \qquad y_2 = 2x_2 + 3$$
$$y_{1,2} = 5 \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Přímka a elipsa se protínají v bodech $[1 - \frac{1}{\sqrt{6}}, 5 - \frac{2}{\sqrt{6}}]$ a $[1 + \frac{1}{\sqrt{6}}, 5 + \frac{2}{\sqrt{6}}]$.

✎ *Cvičení* 9.2. Určete vzájemnou polohu kuželosečky a bodu:

1. $x^2 + y^2 = 1$ a $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,
2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ a $[5, 4]$,
3. $y^2 - 6y - 4x + 1$ a $[7, 2]$.

✓ *Řešení.* bod leží vně✓uvnitř✓na kuželosečce

✎ *Cvičení* 9.3. Najděte průsečík kuželosečky a přímky:

1. $6x^2 - y^2 = 5$ s přímkou $y = -1$,
2. $x^2 - 6x - 7y - 19 = 0$ s osou y,
3. $4x^2 - 8y^2 = 32$ s $y = x - 2$.

✓ *Řešení.* $[-1, -1], [1, -1]$✓$[0, -\frac{19}{7}]$✓$[4, 2]$

✎ *Cvičení* 9.4. Najděte průsečíky kuželoseček určených rovnicemi:

1. $x^2 + y^2 = 5$ s $x^2 + 4y^2 = 17$,
2. $y^2 - 9x - 4y - 5 = 0$ s $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 71 = 0$,
3. $y^2 = 9x$ s $x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$.

✓ *Řešení.* $[1, 2]$ $[-1, 2]$✓$[1, -2]$, $[-1, -2]$✓$[3, -4]$, $[3, 8]$✓$[4, -6]$, $[4, 6]$

10 | Posloupnosti

10.1 Vlastnosti posloupností

Velmi užitečné se ukážou funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$.

Definice 10.1. Zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost* reálných čísel. Posloupnosti se značí $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se nazývají *členy posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 10.1. Členy posloupnosti nemusí začínat indexem 1, setkáme se i posloupností $a_0, a_1, a_2, \ldots$, která je zobrazením $\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$.

Posloupnosti se většinou zadávají jedním ze tří způsobů. První je předpis pro $n-$tý člen, který známe z funkcí,

$$a_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

Druhý způsob je *rekurentní zadání*, $n-$tý člen je zadán pomocí předcházejících členů, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$. Často vyjadřujeme a_n pomocí a_{n-1}. Obvyklým příkladem je geometrická posloupnost $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 4$. Vždy je nutné kvůli jednoznačnosti zadat první člen a_1, tzv. počáteční podmínku.

Nakonec, stejně jako obecné funkce můžeme i posloupnosti zadat nebo znázornit pomocí grafu (Obrázek 10.1).

Posloupnosti jsou funkce, proto se definice jejich vlastností nebude příliš odlišovat.

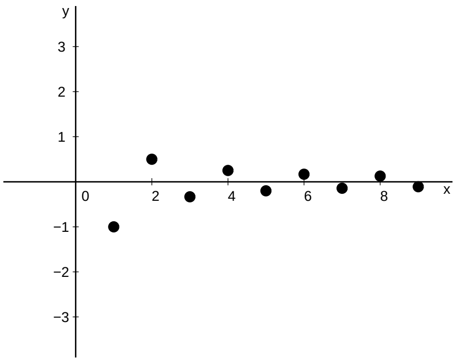
Definice 10.2. Jsou-li dány dvě posloupnosti, můžeme z nich tvořit další posloupnosti pomocí algebraických operací. Posloupnosti

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

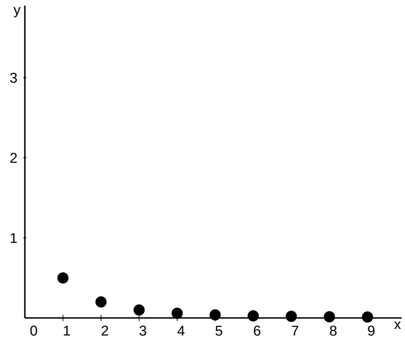
se nazývají *součtem, rozdílem, součinem a podílem posloupností* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. V případě podílu předpokládáme, že $b_n \neq 0 \forall n$.

Definice 10.3. Posloupnost je *omezená (ohraničená)*, jestliže

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k.$$



Posloupnost $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$



Posloupnost $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

Obrázek 10.1: Příklady posloupností

Definice 10.4. Posloupnost je *neomezená shora* jestliže

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : a_n \geq k.$$

✎ *Cvičení* 10.1. Jak byste nadefinovali omezenost shora, zdola a neomezenost s využitím poznatků o omezenosti funkcí?

Poznámka 10.2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *ohraničená*, právě když je posloupnost $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená shora. (Zdola je ohraničena nulou.)

Definice 10.5. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

rostoucí,	je-li	$a_n < a_{n+1}$,
klesající,	je-li	$a_n > a_{n+1}$,
neklesající,	je-li	$a_n \leq a_{n+1}$,
nerostoucí,	je-li	$a_n \geq a_{n+1}$,

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tyto posloupnosti se nazývají *monotónní.*

Vyšetříme, jestli je posloupnost $\{n^2 - n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Vypíšeme si $n-$tý a $(n+1)-$ní člen posloupnosti

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 - n, \\ a_{n+1} &= (n+1)^2 - (n+1) \end{aligned}$$

a zjišťujeme, jestli platí

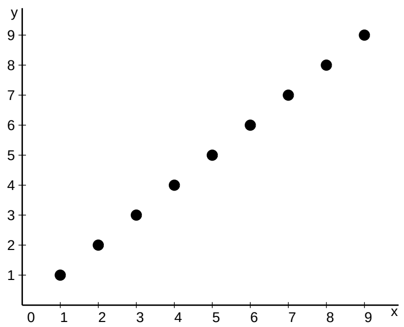
$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \\ n^2 - n &\leq (n+1)^2 - (n+1) \\ n^2 - n &\leq n^2 + n - 1 \\ 1 &\leq 2n. \end{aligned}$$

Nerovnost platí, protože nerovnosti jsou splněny pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost je rostoucí.

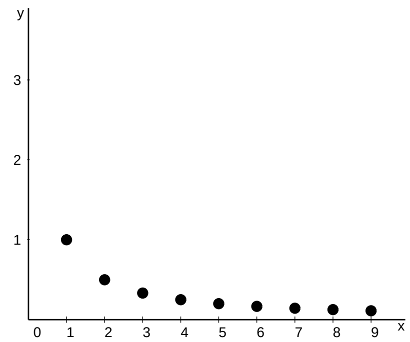
✎ *Cvičení* 10.2. Nakreslete grafy posloupností a zjistěte, jestli jsou monotónní:

1. $\{n\}_{n=1}^{\infty}$,
2. $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$,
3. $\{5\}_{n=1}^{\infty}$,
4. $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$,
5. $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$,
6. $\{(-1)^n \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$.

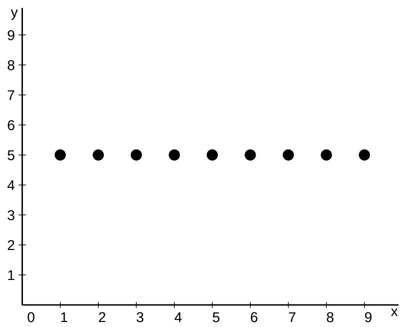
✓ *Řešení.* rostoucí✓klesající✓neklesající i nerostoucí✓není monotónní ✓rostoucí✓není monotónní



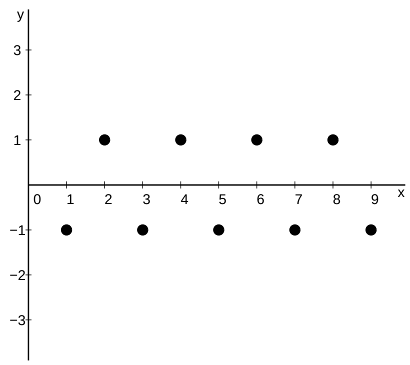
Posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$



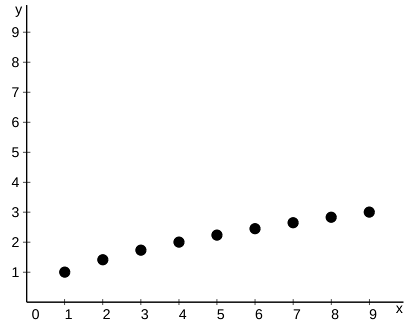
Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$



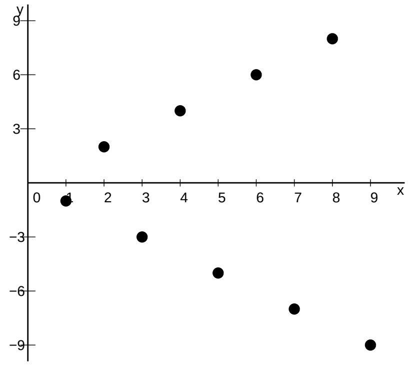
Posloupnost $\{5\}_{n=1}^{\infty}$



Posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$



Posloupnost $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$



Posloupnost $\{(-1)^n \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$

10.2 Limita posloupnosti

Vidíme, že hodnoty posloupnosti se s rostoucím n často přibližují k jednomu číslu. Například hodnoty posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ se přibližovaly k 0 pro zvětšující se n, i když jí třeba žádná hodnota a_n úplně nedosáhla. Tuto vlastnost nazýváme *konvergence* a číslo, ke kterému se hodnoty a_n blíží, *limita* posloupnosti.

Definice 10.6. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k číslu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Poznámka 10.3. Limita a existuje, jestliže pro každé okolí a najdu index n_0 takový, že prvky posloupnosti s vyššími indexy už zůstávají v tomto okolí. Můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

nebo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(a)\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a).$$

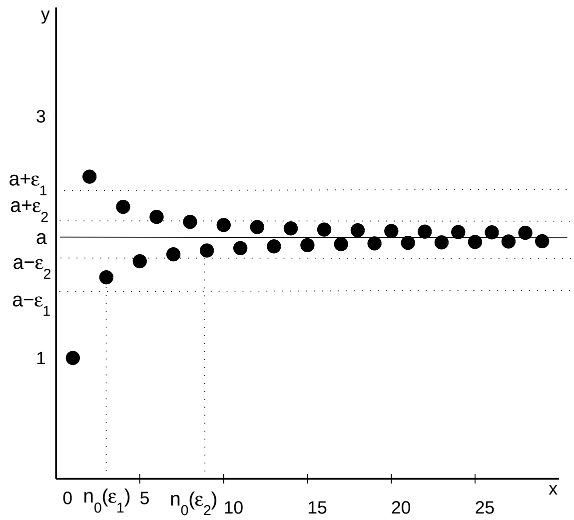
Zápis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ čteme: Limita a_n je rovna a pro n jdoucí do nekonečna.

Cvičení 10.3. Od kterého n_0 jsou hodnoty posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ v $\frac{1}{10}$−okolí bodu 0?

Řešení. $n_0 = 11$

Definice 10.7. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$a_n > K.$$



Obrázek 10.2: Pro každé $\varepsilon-$okolí a najdeme n_0, $a_n \in U_\varepsilon(a), \forall n > n_0$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Existuje znovu nejeden zápis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n > K,$$

nebo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall U(\infty) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n \in U(\infty).$$

✎ *Cvičení* 10.4. Podobně se definuje, když má posloupnost limitu $-\infty$. Jak?

Poznámka 10.4. Má-li posloupnost limitu ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že má *nevlastní limitu*. Můžeme psát $a_n \to \infty$ a čteme: a_n diverguje k ∞. Je-li limita reálné číslo, mluvíme o *vlastní limitě*.

Definici limity zapíšeme i v obecnějším tvaru, aby postihovala všechny případy:

Definice 10.8. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(a)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí $a_n \in U(a)$. Dá se psát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n \in U(a).$$

Definice 10.9. Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá divergentní.

Věta 10.1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz tohoto tvrzení spočívá v tom, že aby měla posloupnost dvě limity, musely by se prvky od nějakého n_0 nacházet zároveň v okolích dvou různých bodů. Ale ke každým dvěma různým bodům najdeme dostatečně malá okolí, která by měla prázdný průnik, takže by do nich nemohly prvky patřit zároveň.

Věta 10.2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, právě když má limitu $\{a_{n+p}\}_{n=1}^{\infty}$ a tyto jsou si rovny.

Posloupnost $\{a_{n+p}\}_{n=1}^{\infty}$ získáme, když sebereme prvních p prvků z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To neovlivní hodnotu, ke které se prvky blíží. Tato věta říká, že konvergence posloupnosti nezávisí na konečném počtu prvků. Když $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 3, \dots,$ pak $\{a_{n+3}\}_{n=1}^{\infty} = 4, 5, 6, \dots$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+3} = \infty$.

Věta 10.3. Každá monotónní posloupnost má limitu.

☛ Limita je vlastní $\Leftrightarrow$ posloupnost je omezená.

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

☛ Limita je nevlastní $\Leftrightarrow$ posloupnost je neomezená.

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,
2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Poznámka 10.5. Jednoduše můžeme říci: Monotónní posloupnost je konvergentní, právě když je omezená. Neplatí ale obráceně, že by konvergentní posloupnost byla monotónní, například $\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

✎ *Cvičení* 10.5. Z pohledu na grafy a z monotónnosti snadno určíte konvergenci posloupností z minulého příkladu.

✓ *Řešení.* diverguje k ∞ ✓konverguje k 0✓konverguje k 5✓diverguje✓diverguje k ∞✓diverguje

Nyní už se dostaneme k postupům jak limity počítat. Začneme větou o limitě tří posloupností. Když jsou hodnoty posloupnosti mezi hodnotami jiných dvou a ty dvě mají stejnou limitu, pak i první posloupnost má tuto limitu.

Věta 10.4. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, pro které platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro n větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a jsou si rovny, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}$. Pak existuje i limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Věta 10.5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, pro které platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Poznámka 10.6. Věta rozvíjí starou známou pravdu o násobení nulou i pro případ limit.

Spočítejme limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n}$. Hodnoty funkce sinus jsou omezeny 1 a -1, posloupnost $\frac{1}{n}$ konverguje k 0. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n^2 = 0.$$

Použít bychom mohli i větu o limitě tří posloupností. Protože

$$-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}\,(\mathbb{N}),$$

pak můžeme za ohraničující posloupnosti vzít $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\frac{1}{n} \le \frac{\sin n^2}{n} \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odtud dostaneme

$$0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Znovu dostáváme limitu nulovou.

Nejvíce budeme při výpočtu limit spoléhat na následující větu. U ní vynikne ještě víc, že se limity složitějších posloupností snažíme počítat pomocí limit posloupností jednodušších.

Věta 10.6. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí:

- ☛ $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- ☛ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
- ☛ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, je-li $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \vee b_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}$,

pokud mají pravé strany smysl v $\mathbb{R}^*$. Také platí:

- ☛ $\lim_{n\to\infty} k a_n = k a,\ k \in \mathbb{R}$,
- ☛ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

pokud jsou a, b reálná čísla.

Abychom mohli úspěšně používat tuto větu, měli bychom si nejdříve připomenout počítání na rozšířené reálné ose. Víme, že $3 + \infty = \infty$, $-2 \cdot (3 - \infty) = \infty$ nebo $\frac{5}{\infty} = 0$. Naopak neumíme spočítat $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ nebo $\infty - \infty$. Pokud jsme schopni nalézt výsledek, řekneme, že operace má smysl. V opačném případě operace smysl nemá.

Už dokážeme najít limity některých jednodušších posloupností, například:

- ☛ $\lim_{n\to\infty} k = k, k \in \mathbb{R}$,

- $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$, $k > 0$,
- $\lim_{n\to\infty} n^z = 0$, $\mathbb{Z} \ni z < 0$,
- $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, $a > 1$,
- $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, $|a| < 1$.

Samozřejmě toužíme spočítat i limity složitější. Nejpohodlnější by bylo například u limity

$$\lim_{n\to\infty} n^2 + n$$

spočítat limity

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,\ \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

a sečíst je. Předchozí věta nám rozděluje případy, kdy to možné je a kdy ne. Můžeme psát $\{a_n\} = n^2$, $\{b_n\} = n$. Pak

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ b = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Pravá strana zmíněná ve větě, tedy

$$a + b = \infty + \infty = \infty,$$

má smysl v aritmetice na rozšířené reálné ose. Dá se tak psát

$$\lim_{n\to\infty} n^2 + n = \lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} n = \infty + \infty = \infty.$$

Naopak když pro

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n$$

zapíšeme $\{a_n\} = n^2$, $\{b_n\} = n$ a

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ b = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

pak pravá strana

$$a - b = \infty - \infty$$

smysl nemá, a tak tímto způsobem limitu rozložit nelze. Neznamená to ale, že neexistuje jiný postup, jak limitu spočítat. Není totiž nikde napsáno, že posloupnost $\{n^2 - n\}$ musíme považovat zrovna za součet posloupností. Zapíšeme ji jako součin,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \lim_{n\to\infty} n \cdot (n-1).$$

Spočítáme pro $\{a_n\} = n$, $\{b_n\} = n - 1$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\ b = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Násobení

$$a \cdot b = \infty \cdot \infty = \infty$$

má výsledek, a tedy i smysl, a proto

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} (n-1) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Podobně se snažíme najít vhodný rozklad i pro jiné složitější limity. Tento rozklad nemusí být na první pohled zřejmý. Proto se učíme postupy pro konkrétní typy limit. Abychom mohli počítat limity podílů polynomických posloupností, hodí se nám znát limitu podílu stejných posloupností $\left\{\frac{a_n}{a_n}\right\}$, kde $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\left\{\frac{a_n}{a_n}\right\} = 1, 1, 1, \ldots,$$

její limita je zřejmě 1.

Spočítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n}.$$

Zjevně nám nevyjde postup, kdy posloupnost $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$ budeme považovat za podíl posloupností. Můžeme ale z čitatele i jmenovatele vytknout n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n^2-\frac{1}{n}}{1}.$$

Zkusíme zjistit, jestli má smysl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-\frac{1}{n}}{1}.$$

Už víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$. Abychom spočítali $\lim_{n\to\infty} n^2 - \frac{1}{n}$, znovu použijeme náš postup. Snadno zjistíme

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Operace $\infty - 0 = \infty$ má smysl, proto existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - \frac{1}{n} = \infty.$$

Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-\frac{1}{n}}{1} = 1 \cdot \infty = \infty.$$

U limit podílů polynomů tedy vytkneme z čitatele i jmenovatele vhodnou mocninu n. Tuto vhodnou mocninu najdeme jako ten menší ze stupňů polynomů v čitateli a jmenovateli. Například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{n^3-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{n-2}.$$

Víme, že $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$, zbývá vyšetřit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{n-2}.$$

Tady už zkoumáme podíl limit

$$\frac{\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}n-2}.$$

Limitu

$$\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$

můžeme rozložit na

$$\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=1-0+0=1.$$

Podobně $\lim_{n\to\infty}n-2=\infty$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{n-2}=\frac{\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}n-2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Nyní pro původní limitu má smysl rozklad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{n-2}=1\cdot 0=0.$$

Limity podílů polynomů ale takto složitě počítat nebudeme. Označme

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_1n+b_0}.$$

Nastat mohou jen tři odlišné případy:

- Pro $p>q$

$$l=\frac{n^q}{n^q}\cdot\infty=\pm\infty.$$

- Pro $p<q$

$$l=0.$$

- Pro $p=q$

$$l=\frac{a_p}{b_p}.$$

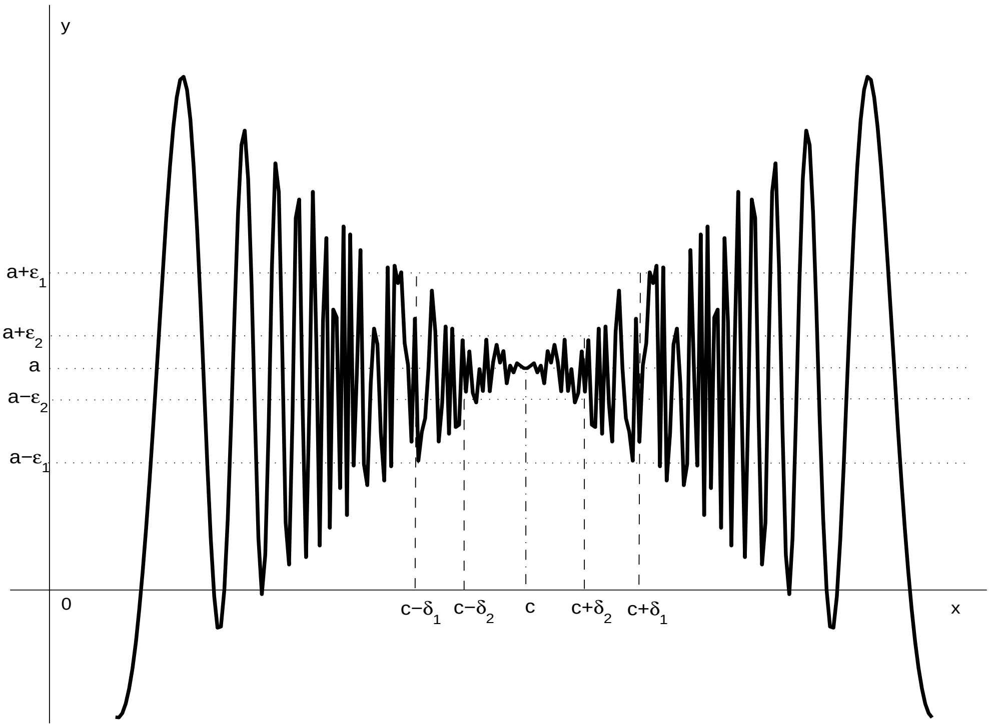
✎ *Cvičení* 10.6. Spočítejte:

1. $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}$,
2. $\lim_{n\to\infty} -2^n$,
3. $\lim_{n\to\infty} 3n+6$,
4. $\lim_{n\to\infty} n^3-6n^2-6n$,
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3}$,
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{6n^3+4}$,
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4-6n^5}{3n^4-2n^3+5}$,
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4-6n^5}{3n^4-2n^3+5n^5}$.

✓ *Řešení.* 1✓ $-\infty$✓ ∞✓ ∞✓ 0✓ 0✓ $-\infty$✓ $-\frac{6}{5}$

11 | Limita funkce

Často se dostaneme do situací, kdy budeme z předpisu funkce zjišťovat, jak se chová nebo jak vypadá graf v okolí bodů, kde není definovaná, nebo pro velká x. Například funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ se pro velká x hodnotami spořádaně blíží k nule. Nás bude ale zajímat, jak se pro velká x bude chovat funkce $g(x) = \frac{1}{x}\sin x^2$. Když se zase s x blížíme k 0, funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ roste pro kladná x k nekonečnu. Jak se ale bude chovat okolo 0 funkce $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$? Zjistíme to díky limitě funkce (Obrázek 11.1).



Obrázek 11.1: Funkce má v bodě c limitu a

Definice 11.1. Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce $f(x)$. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má *limitu a* v bodě c ($\lim_{x\to c} f(x) = a$), právě když

$$\forall U(a) \exists P(c) : x \in P(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(a),$$

nebo

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D_f, x_n \neq c : \lim_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Uvedli jsme najednou dvě možnosti, jak limitu definovat. Limita, pokud existuje, je číslo, ke kterému se blíží funkční hodnoty v okolí daného bodu c. Pokud limita v nějakém hromadném bodě definičního oboru existuje, funkční hodnoty z jeho okolí by se měly dostávat tím blíž k hodnotě limity, čím je okolí užší. Druhá definice říká, že přibližují-li se body definičního oboru k bodu c, přibližují se i jejich funkční hodnoty k hodnotě limity (pokud existuje).

Hromadný bod definičního oboru obsahuje v každém svém okolí body definičního oboru funkce, na druhou stranu nemusí sám do tohoto oboru patřit. Limita nezávisí na případné funkční hodnotě v bodě c, to říkají v případě první verze definice $\exists P(c) : x \in P(c)$ a $x_n \neq c$ ve druhé verzi. Funkce může mít v bodě nejvýše jednu limitu. Definice se k výpočtu limit neužívá. Někdy se hodnota limity odhadne a dokazuje, nebo se dokazuje, že neexistuje.

Definice 11.2. Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce $f(x)$ takový, že v každém pravém okolí $U^+(c)$ bodu c leží nekonečně mnoho bodů D_f. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má *limitu zprava a* v bodě c ($\lim_{x\to c^+} f(x) = a$), právě když

$$\forall U(a) \exists P^+(c) : x \in P^+(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(a),$$

nebo

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D_f, x_n > c : \lim_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Cvičení 11.1. Nadefinujte limitu zleva.

I když limita neexistuje, mohou existovat limity zprava a zleva. Pokud jsou různé, limita v bodě neexistuje. Příkladem je $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě 0. Limity zleva a zprava se souhrnně nazývají *jednostranné limity.*

Grafy elementárních funkcí se většinou dají nakreslit jedním nebo dvěma tahy tužkou, body ve kterých musíme případně tužku zvednout, se nazývají body nespojitosti. My si nyní nadefinujeme, kdy je funkce v bodě spojitá, definice bude podobná definici limity, se kterou spojitost úzce souvisí.

Definice 11.3. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě $c \in D_f$, právě když

$$\forall U(f(c)) \exists U(c) : x \in U(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(f(c)),$$

nebo

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D_f : \lim_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Poznámka 11.1. Aby mohla být funkce spojitá v bodě c, musí tento bod náležet do definičního oboru. Další rozdíl mezi limitou a spojitostí je v tom, že u limity se musí funkční hodnoty blížit k nějakému prvku rozšířené reálné osy, u spojitosti se hodnoty funkce ve zmenšujícím se okolí bodu c musí blížit funkční hodnotě $f(c)$.

Věta 11.1. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadný bod definičního oboru funkce f. Pak f je spojitá v bodě c, právě když $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Když chceme tuto větu tvaru ekvivalence dokázat, musíme dokazovat dvě implikace.

1. Předpokládáme spojitost f v bodě c. Pokud je funkce f spojitá v bodě c platí z definice spojitosti:

   $$\forall U(f(c)) \exists U(c) : x \in U(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(f(c))$$

   Jestliže něco platí pro okolí $U(c) = P(c) \cup \{x\}$, bude to platit i pro redukované okolí $P(c)$. Definice limity vyžaduje nějaké a, pro které by tvrzení o okolích platilo. Nám se přímo nabízí vzít $f(c)$ za a. Můžeme tak vyměnit $P(c)$ za $U(c)$ a $f(c)$, za a. Dostaneme definici limity.

2. Nyní předpokládáme, že existuje limita rovná funkční hodnotě $a = \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Dá se tedy do definičního vztahu pro limitu dosadit

   $$\forall U(f(c)) \exists P(c) : x \in P(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(f(c)).$$

   Jediný rozdíl oproti definici spojitosti f v c v redukovaném okolí c. Protože ale i $f(c) \in U(c) \forall U(c)$, vztah platí pro $\{c\} \cup P(c) = U(c)$. Dostaneme definici spojitosti

   $$\forall U(f(c)) \exists U(c) : x \in U(c) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in U(f(c)).$$

Elementární funkce nemají v definičním oboru body, kde by nebyly spojité.

Věta 11.2. Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $c \in D_f \cap D_g$. Pak jsou v bodě c spojité funkce

$$f + g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}, g(c) \neq 0,\ |f|,\ k \cdot f, k \in \mathbb{R}$$

Věta 11.3. Nechť je funkce f spojitá v bodě $c \in D_f$ a g v bodě $f(c) \in D_g$. Pak je funkce $g(f)$ spojitá v bodě c.

Tyto věty nám říkají, že pokud jsme schopni nakreslit grafy dvou funkcí jednou čarou, pak i graf například součtu těchto funkcí půjde nakreslit jednou čarou, stejně jako graf složené funkce.

Použijeme to pro elementární funkce a funkce z nich odvozené, ty všechny budou spojité, a proto limity v bodech definičního oboru budou rovny funkční hodnotě. V nevlastních bodech ohraničujících definiční obor však může i u elementárních funkcí docházet ke skokům (např. $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě 0.)

Když budeme počítat limitu $\lim\limits_{x\to 0} x^2-4$, zjistíme nejdříve, jestli 0 patří do definičního oboru. Protože patří, bude limita v 0 rovna funkční hodnotě 0, tedy

$$\lim_{x\to 0} x^2-4 = 0^2-4 = -4.$$

Výpočet limit se nám tak rozpadl na dva hlavní případy, limity v bodech definičního oboru elementárních a odvozených funkcí budeme hledat jednoduše jako funkční hodnoty, limity v bodech mimo definiční obor (nevlastních bodech) budeme hledat pomocí následujících vět.

Věta 11.4. Nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, a existuje $P(c)$ tak, že $P(c)\cap D_f = P(c)\cap D_g \neq \emptyset$ a funkce g je omezená $(\exists k\in\mathbb{R} : g(x) < K\forall x \in P(c)\cap D_g)$. Pak limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Limita součinu funkce omezené s funkcí s nulovou limitou je nulová.

Snadno tak zjistíme, že

$$\lim_{x\to 0} x\sin x = 0,$$

protože $|\sin x| \leq 1$ a $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Pokud mají dvě funkce v bodě stejnou limitu a funkční hodnoty třetí funkce se pohybují mezi funkčními hodnotami zmíněných dvou, má i třetí funkce stejnou limitu. Dozvíme se to z věty o limitě tří funkcí.

Věta 11.5. Nechť $c\in\mathbb{R}^*$ a nechť existuje $P(c)$ tak, že $P(c)\cap D_f = P(c)\cap D_g = P(c)\cap D_h \neq \emptyset$. Nechť dále pro $x\in P(c)\cap D_f$ platí $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} h(x)$ a jsou si rovny. Pak existuje i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x)$.

Zkusme spočítat $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\sin x$ pomocí této věty. Víme, že

$$-1\leq \sin x \leq 1,$$

proto

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\cdot\sin x \leq \frac{1}{x},\ x>0.$$

Navíc

$$\lim_{x\to\infty} \pm\frac{1}{x} = 0,$$

tedy máme dvě ohraničující funkce $f_1(x) = -\frac{1}{x}$ a $f_2(x) = \frac{1}{x}$ se stejnou limitou v ∞, proto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\sin x = 0.$$

K výpočtům limit budeme nejčastěji využívat větu:

Věta 11.6. Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = a$, $\lim_{x\to c} g(x) = b$, $a,b\in\mathbb{R}^*$. Pak

☛ $\lim_{x\to c} f(x)\pm g(x) = a\pm b$,

- ☛ $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = a\cdot b$,
- ☛ $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, je-li pro nějaké $P(c)$ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \forall x \in P(c) \vee \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \forall x \in P(c)$

pokud mají pravé strany smysl v $\mathbb{R}^*$. Také platí:

- ☛ $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = k\cdot a,\ k\in\mathbb{R}$,
- ☛ $\lim_{x\to c} |f(x)| = |a|$.

Používáme aritmetiku na rozšířené reálné ose. Smysl mají tedy i některé operace s ∞. Objevují se však i úskalí, je velký rozdíl mezi funkcí $g(x) = 0$ a funkcemi, pro které $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. Dělení 0 není definováno, ale limita $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ mít smysl může, i když $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Pro elementární funkce známe grafy, a tak vidíme i jejich limity v libovolných nevlastních bodech:

- ☛ $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty,\ \forall n\in\mathbb{N}$,
- ☛ $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty,\ a > 1$,
- ☛ $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ a > 1$.

Limity složitějších funkcí spočítáme pomocí limit elementárních funkcí tak, že je rozložíme na „vhodné" součty, součiny či podíly více limit jednodušších funkcí.

$$\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty.$$

Rozložili jsme funkci $f(x) = x + x^2$ na součet funkcí $g(x) = x$ a $h(x) = x^2$. Součet $\lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty$ má smysl, proto můžeme větu použít s takovýmto rozkladem.

Smysl naopak nemají rozklady limit takové, že nám vychází

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0}.$$

Například nebudeme rozkládat

$$\lim_{x\to\infty} x - x^2 = \lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty - \infty,$$

protože dostaneme nesmyslný výraz, ale

$$\lim_{x\to\infty} x - x^2 = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} (1 - x) = \infty\cdot(-\infty) = -\infty.$$

Velmi často používáme rozklad

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{g(x)} \lim_{x\to c} h(x),$$

První limita je vždy 1 a stačí dále počítat jen $\lim_{x\to c} h(x)$. Zkusme spočítat

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6},$$

Rozložit funkci na nabízející se podíl dvou funkcí nemá smysl, dostali bychom $\frac{0}{0}$.

Umíme ale polynomy rozložit na součin:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot x}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x-3} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{x}{x-2} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3.$$

Ještě nám zbyl případ, kdy $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ v $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$. Jestliže nedokážeme, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ je na nějakém $P(c)$ jen kladný, nebo jen záporný a nepodaří se nám limitu spočítat předcházejícím způsobem, zkoušíme počítat obě jednostranné limity. Pokud tyto existují a rovnají se, limita existuje a je jim také rovna. V opačném případě limita neexistuje.

Toto úskalí vidíme na limitě

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$

Podíl $\frac{1}{x}$ není na žádném okolí $P(0)$ jen kladný nebo jen záporný ani se nedá smysluplně vytknout $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{g(x)}$. Jednostranné limity vycházejí různé,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

proto limita neexistuje.

Naproti tomu limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

existovat bude (∞), protože jednostranné limity vycházejí shodně

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty,\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Limitu bychom našli také pro $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$. Můžeme totiž upravovat

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

✎ *Cvičení* 11.2. Spočítejte limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x\cdot e^{x^2}},\ \lim_{x\to\infty} x+e^x,\ \lim_{x\to 0} x^{-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+e^x,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to3}\frac{x^3-3x}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^3-5x+6}$$

V limitách podílů polynomů s x jdoucím do $\pm\infty$ se osamostatní $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^n}(=1)$, kde n je menší ze stupňů polynomů v čitateli a jmenovateli a dostáváme stejný výsledek jako u posloupností.

✓ *Řešení.* 1, 0, ∞, ∞, ∞, $-\infty$, 1, neexistuje, 0

Poznámka 11.2. Oblíbenějším způsobem výpočtu limit bude l'Hospitalovo pravidlo.

12 | Derivace funkce

12.1 Zavedení derivace

Derivace je klíčový nástroj pro práci s funkcemi. Derivace ukazuje, jestli funkce roste nebo klesá, a používá se pro hledání minim a maxim funkce.

Představme si, že jsme vyrazili na výlet a chceme porovnat, do jak prudkého kopce jdeme. Je velký rozdíl chodit po Beskydech nebo po Šumavě, i když se dostáváme do srovnatelných nadmořských výšek. Nejjednodušší způsob jak prudkost kopce popsat, je dělit nadmořskou výšku, kterou jsme nastoupali, vzdáleností, kterou jsme přitom ušli. Dělíme tak rozdíl nadmořských výšek délkou ujité cesty. Můžeme pak říct, že cesta z Frýdlantu na Lysou horu je skoro čtyřikrát prudší než z Kvildy na Černou horu. Obě hory jsou podobně vysoké, cesty podobně dlouhé, ale na Lysou horu musíme vyšlapat 900 výškových metrů proti 250 na Černou horu.

Matematicky bychom takový výlet mohli popsat funkcí f, která uražené vzdálenosti přiřazuje nadmořskou výšku. Vyjdeme z bodu x s funkční hodnotou $f(x)$ (nadmořskou výškou) a dostaneme se do bodu y s funkční hodnotou $f(y)$ nadmořskou výškou. Jako naši prudkost dostáváme podíl

$$a = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

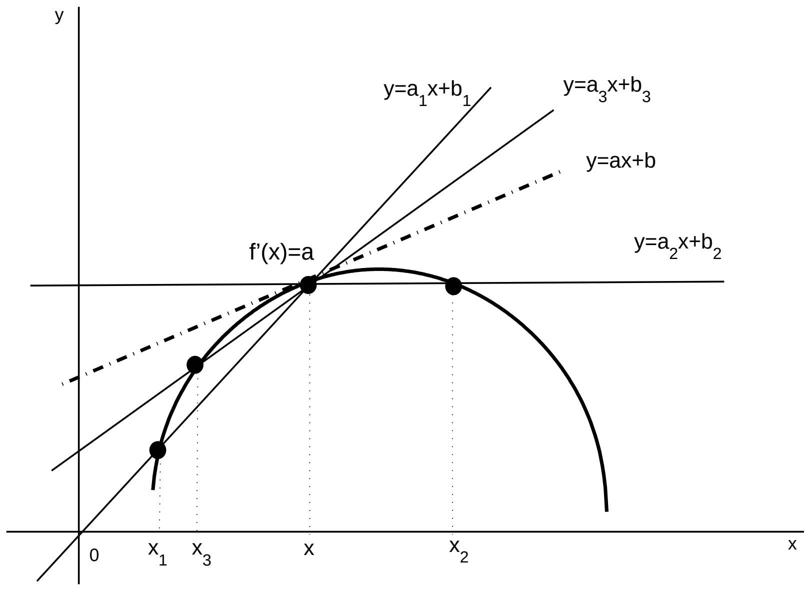
to je ale směrnice přímky, která prochází body grafu $(x, f(x)), (y, f(y))$. Tedy naše prudkost je směrnice přímky procházející bodem, ze kterého jsme vyšli, a bodem, kam dojdeme.

Kopec není obvykle ve všech místech stejně prudký, nás bude nyní zajímat, jak změřit prudkost kopce v konkrétním místě (ne na celém úseku). Je jasné, že čím blíž k tomuto bodu budou počáteční a cílový bod měření, tím větší bude naděje na správný odhad prudkosti. Můžeme třeba vzít zkoumaný bod jako počáteční a pro stále kratší úseky počítat směrnice (prudkosti kopce). Tyto směrnice se mohou blížit k určité hodnotě. My ji umíme najít pomocí limit. Když se zadíváme na graf, tak tímto postupem vytváříme sečny grafu, které konvergují k tečně grafu ve zkoumaném bodě (Obrázek 12.1). Směrnice sečen pak konvergují k směrnici tečny ke grafu v tomto bodě. Pro posloupnost bodů $\{x_n\}$ přibližujících se k x dostaneme posloupnost směrnic $\{a_n\}$:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, a_2 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, a_3 = \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x}, \ldots$$

Ta bude obvykle konvergovat k limitě a, které budeme říkat derivace funkce f v bodě x a dále ji budeme značit $f'(x)$,

$$f'(x) = a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$



Obrázek 12.1: Směrnice sečen konvergují ke směrnici tečny (derivaci v bodě)

Derivaci častěji zapisujeme pomocí limity pro x jdoucí k c :

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

nebo místo x píšeme $c+h$ a zdůrazňujeme tak rozdíl h mezi x a c

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{c+h-c} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Definice 12.1. Nechť funkce $f(x)$ definovaná na nějakém okolí bodu $c \in D_f$. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c *derivaci*, jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Tuto limitu nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě c a značíme $f'(c)$.

Z definice derivace jako limity plyne následující terminologie. Derivace známe *vlastní* (najdeme reálné číslo), nebo *nevlastní* (limita je rovna $\pm\infty$). Derivace také nemusí existovat (stejně jako u limit.) Pokud budeme brát body x_n jen z pravého (levého) okolí bodu x, budeme mluvit o derivaci funkce f *zprava (zleva)* v bodě x.

Kladná derivace bude znamenat, že funkce v bodě roste, záporná, že funkce v bodě klesá. Zajímavý je případ, kdy je derivace 0. To se v našem turistickém příkladě může přihodit, když jsme na kopci. Pokud popojdeme krátkou vzdálenost, naše nadmořská výška se nebude měnit, podíl změny nadmořské výšky k ujité vzdálenosti bude 0. Něco podobného se nám může stát v údolí nebo při chození po rovině. Jestliže je pro nějaký bod grafu tečna rovnoběžná s osou x, derivace v tomto bodě je 0. U funkcí to znamená, že v lokálních maximech a minimech je derivace 0.

Podobně jako může mít funkce v bodě jen jednu limitu, tak může mít funkce v bodě jen jednu derivaci (což je taky limita). Navíc, funkce má derivaci v bodě, právě když jsou si v tomto bodě pravá i levá derivace rovny.

Poznámka 12.1. Zmiňme ještě souvislost derivace a spojitosti funkce. Pokud derivace v bodě c existuje, je funkce v bodě c spojitá. Opačná implikace neplatí, stačí uvažovat funkci $f(x) = |x|$ v bodě 0.

Nejdříve se naučíme počítat derivace pro elementární funkce. Derivace funkce $f(x)$ bude funkce $f'(x)$, která každému číslu x přiřadí derivaci v tomto bodě, pokud existuje. Zkusme použít definiční limitu pro výpočet derivace funkce $f(x) = x^2$. (Máme $f(c) = c^2,\ f(c+h) = (c+h)^2$). Dosazením dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c^2 + 2ch + h^2 - c^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ch + h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2ch + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \lim_{h\to 0} (2c + h) = 1 \cdot 2c = 2c.$$

Po dosazení x za c vidíme, že předpis pro derivaci $f(x) = x^2$ bude

$$(x^2)' = 2x.$$

Spočítejme tečnu ke grafu funkce v bodě 3. Derivaci v bodě 3 dostaneme ze vzorce

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6,$$

což je směrnice hledané tečny. Tečna musí procházet bodem grafu $[3, f(3)] = [3, 9]$. Hledáme lineární funkci

$$g(x) = ax + b,$$

známe směrnici 6, a bod $[3, 9]$, kterým prochází, odtud $g(3) = 9$. Najdeme tak parametr lineární funkce z rovnice

$$9 = 6 \cdot 3 + b,$$

tedy $b = -9$ a $g(x) = 6x - 9$.

✎ *Cvičení* 12.1.

1. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě 1. Jaká funkce bude popisovat tečnu ke grafu v bodě 1. Zkuste to samé pro bod 0.

2. Odvoďte vzorec pro derivaci $f(x) = x,\ g(x) = 56$.

✓ *Řešení.* $f'(x) = (x^2)' = 2x,\ f'(1) = 2 \cdot 1 = 2,\ t(x) = 2x - 1,\ f'(0) = 2 \cdot 0 = 0,$ $t(x) = 0$✓ $f'(x) = 1,\ g('x) = 0$

S o něco většími obtížemi by se daly odvodit i vzorce pro derivace ostatních elementárních funkcí.

- ☞ $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$
- ☞ $(x^a)' = ax^{a-1}, a \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty),$
- ☞ $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R},$
- ☞ $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, x \in \mathbb{R},$
- ☞ $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty),$
- ☞ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x \in (0, \infty),$
- ☞ $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R},$
- ☞ $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R},$
- ☞ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$

✎ *Cvičení* 12.2. Spočítejte derivace funkcí a najděte tečny v bodech:

1. $f(x) = x^3$ v bodě 0,

2. $f(x) = x^8$ v bodě 2,

3. $f(x) = \sin x$ v bodě π.

✓ *Řešení.* $f'(x) = (x^3)' = 3x^2,\ f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0, y = 0$✓ $f'(x) = (x^8)' = 8x^7,\ f'(2) = 8 \cdot 2^7 = 1024,\ y = 1024x - 1792$✓ $f'(x) = (\sin x)' = \cos x,\ f'(\pi) = \cos \pi = -1,\ y = -x + \pi$

Pro složitější funkce budeme potřebovat postupy, jak si jejich derivování převést na derivování elementárních funkcí.

Věta 12.1. Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají vlastní derivaci v bodě $c \in D_f \cup D_g \neq \emptyset$. Pak platí:

- ☛ $(kf(x))' = k(f(x))'$,
- ☛ $(f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'$,
- ☛ $(f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) + f(x) \cdot (g(x))'$,
- ☛ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f(x))' \cdot g(x) - f(x) \cdot (g(x))'}{g^2(x)}$.

Můžeme říct, že derivace součtu funkcí je rovna součtu jejich derivací a že konstanta se dá z derivované funkce vytknout. Tyto vztahy se dají zase dokázat pomocí limit.

Zkusme se podívat na derivaci součtu funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v bodě c.

$$(f+g)'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h) - (f+g)(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + g(c+h) - (f(c) + g(c))}{h}$$

Protože derivace funkcí f i g v bodě c jsou vlastní ($f'(c), g'(c) \in \mathbb{R}$, tedy limity $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h}$ jsou reálná čísla a má smysl je sčítat) má smysl rozklad limity na součet limit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + g(c+h) - (f(c) + g(c))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f)(c+h) - (f)(c)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(g)(c+h) - (g)(c)}{h} = f'(c) + g'(c).$$

Nyní už jsme schopni spočítat například derivaci $h(x) = 5\sin x + 4x^2$,

$$(5\sin x + 4x^2)' = (5\sin x)' + (4x^2)',$$

protože derivace součtu je rovna součtu derivací,

$$= 5(\sin x) + 4(x^2)' = 5\cos x + 4 \cdot 2x = 5\cos x + 8x.$$

Snadno zderivujeme součin $h(x) = x\sin x$,

$$(x\sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x.$$

Nakonec i při derivaci podílu funkcí $h(x) = \frac{\sin x}{x+3}$ derivujeme jen elementární funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x+3$,

$$\left(\frac{\sin x}{x+3}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot (x+3) - \sin x \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot (x+3) - \sin x \cdot 1}{(x+3)^2}.$$

✎ *Cvičení* 12.3. Spočítejte:

1. $(6+3x^2+4x^4)'$,
2. $\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)'$ v bodě 1,
3. $(\sin x + 2\cos x)'$ v bodě π.
4. Dokažte tvrzení věty pro derivaci rozdílu funkcí.

✓ *Řešení.* $6x+12x^3$✓$\frac{2}{3}$✓-1

✎ *Cvičení* 12.4. Spočítejte:

1. $(e^x \cdot \sin x + 2\cos x)'$,
2. $[(6+3x^2+4x^4)(2x+3)]'$,
3. $\left(\frac{x^3+3}{x+2}\right)'$,
4. $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$.

✓ *Řešení.* $e^x\sin x + e^x\cos x - 2\sin x$✓$(6x+12x^3)(2x+3)+2(6+3x^2+4x^4)$✓$\frac{2x^3+6x^2-3}{(x+2)^2}$✓$\frac{1}{\cos^2 x}$

Často potřebujeme derivovat složené funkce.

Věta 12.2. Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $c \in D_f$ a nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě $a = f(c) \in D_g$. Pak složená funkce $g(f)$ má vlastní derivaci v bodě c a platí

$$(g(f))'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Zderivujme například $h(x) = e^{x^2}$ v bodě 3. Vnější funkce je $g(x) = e^x$, vnitřní funkce je $f(x) = x^2$. Derivace složené funkce v bodě 3 je součinem rychlosti růstu vnitřní funkce f v bodě 3, $f'(3) = (x^2)'(3) = 6$, a rychlosti růstu vnější funkce g v bodě $f(3) = 9$. Tedy

$$h'(3) = (g(f))'(3) = g'(f(3)) \cdot f'(3) = g'(9) \cdot f'(3) =$$

$$= (e^x)'(9) \cdot (x^2)'(3) = e^x(9) \cdot 2x(3) = e^9 \cdot 6 = 6e^9.$$

Když derivujeme složenou funkci, je hlavní problém v tom, jak spočítat $g'(f)(x)$. Nejprve si musíme uvědomit, že se jedná o složenou funkci z $g'(x)$ a $f(x)$. Výpočet můžeme provést ve dvou krocích, zderivujeme funkci g a pak za proměnnou dosadíme předpis vnitřní funkce f.

Zderivujeme $h(x) = (2x-3x^2)^3$. Vnitřní funkce je $f(x) = 2x - 3x^2$, vnější $g(x) = x^3$. Nejdříve zderivujeme

$$g'(x) = 3x^2,$$

nyní za x dosadíme $f(x)$ a dostaneme

$$g'(f)(x) = 3\cdot(2x-3x^2)^2.$$

Vynásobením $f'(x) = 2-6x$ dostaneme hledanou derivaci složené funkce h

$$h'(x) = g'(f)(x)\cdot f'(x) = 3(2x-3x^2)^2\cdot(2-6x).$$

✎ *Cvičení* 12.5. Spočítejte:

1. $\left(e^{-2x}\right)'$,
2. $\left(e^{-x^2}\right)'$,
3. $(\sqrt{2x+3})'$,
4. $\left((x^3+3x)^{-2}\right)'$,
5. $\left(x\sin(x^2)\right)'$.

✓ *Řešení.* $-2e^{-2x}$✓$-2xe^{-x^2}$✓$\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$✓$-2\cdot\frac{3x^2+3}{(x^3+3x)^3}$✓$\sin x^2+2x^2\cos x^2$

12.2 l'Hospitalovo pravidlo

Derivaci jsme definovali pomocí limity. Nyní budeme limity počítat s využitím derivací. Najdeme limity nepříjemných funkcí (z hlediska aritmetiky na rozšířené reálné ose). Těžko bychom rozkládali limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

na jednodušší limity. Snadno ji ale spočteme pomocí l'Hospitalova[1] pravidla.

Věta 12.3. Nechť $c\in\mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají vlastní derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ na nějakém redukovaném okolí bodu c. Nechť je buď

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty.$$

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje i $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[1] připomeňme výslovnost: [lopitalova]

Vždy je nutné před použitím l'Hospitalova pravidla ověřit, jestli limita představuje jeden z vyjmenovaných případů, obvykle $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Například pravidlo nemůžeme použít pro

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1},$$

protože v podílu limit není ani v čitateli a zároveň jmenovateli 0, ani ∞ ve jmenovateli. Naproti tomu snadno spočteme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},$$

protože

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0}x=0.$$

l'Hospitalovo pravidlo se dá použít,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Uvidíme, že $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}$ spočítáme také pomocí l'Hospitalova pravidla. Potřebujeme však tuto limitu zapsat ve tvaru podílu,

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}.$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty}x=\infty\ \lim_{x\to\infty}e^x=\infty,$$

podmínka l'Hospitalova pravidla je splněna,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Poznámka 12.2. l'Hospitalovo pravidlo platí stejně i pro limity zprava nebo zleva.

✎ *Cvičení* 12.6. Spočítejte limity, ověřte použitelnost l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^{x^2}}{x\cdot e^{x^2}},\ \lim_{x\to\infty}x+e^x,$$

$$\lim_{x\to-\infty}x+e^x,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x}{x^2-5x+6},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^3-5x+6},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x},\ \lim_{x\to-\infty}xe^x,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos^2(x)},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

✓ *Řešení.* 1, nepoužijeme; 0; ∞ lepší vyjádřit jako součin limit; ∞ nepoužijeme; $-\infty$ nepoužijeme; ∞; neexistuje, nepoužijeme; 0; $\frac{1}{3}$; 0; 1, použijeme dvakrát za sebou; $\frac{a}{b}$

12.3 Druhá derivace

Pokud derivujeme derivaci funkce, získáme druhou derivaci funkce.

Definice 12.2. Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $c \in D_f$. Nechť funkce f' má derivaci v bodě c. Pak $(f')'$ nazýváme *druhou derivací funkce* f a značíme f''.

Poznámka 12.3. Podobně můžeme definovat i derivace vyšších řádů

$$f''' = (f'')',$$

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Například

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = (\cos x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

✎ *Cvičení* 12.7. Spočítejte:

1. $\left(x^3 + 3x\right)''$,
2. $(\sqrt{2x+3})''$,
3. $\left(e^{-2x}\right)''$,
4. $(xe^{-x})''$,
5. $(\ln x)^{(n)}$.

✓ *Řešení.* $6x$✓$-\frac{1}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$✓$4e^{-2x}$✓$-2e^{-x} + xe^{-x}$✓$(-1)^{n+1}\frac{n-1}{x^n}$✓

13 | Vyšetřování průběhu funkce

Všechny typy výpočtů, které jsme doposud prováděli, využijeme při vyšetřování průběhu funkce, tedy konstrukci grafu z předpisu funkce. Nejdříve si objasníme, jak při tom použijeme hlavně limity a derivace. Největší význam má derivace pro hledání lokálních maxim a minim funkcí.

Upřesníme si pojmy růstu funkce v bodě a lokálních extrémů.

Definice 13.1. Funkce f se nazývá rostoucí v bodě $x_0 \in D_f$, jestliže existuje redukované okolí $P(x_0) \subset D_f$ tak, že platí

$$x \in P^-(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0),\ x \in P^+(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Dále:
f se nazývá klesající v x_0, když

$$x \in P^-(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0),\ x \in P^+(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

f se nazývá neklesající v x_0, když

$$x \in P^-(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0),\ x \in P^+(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

f se nazývá nerostoucí v x_0, když

$$x \in P^-(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),\ x \in P^+(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Je celkem zřejmé, že po funkci rostoucí v bodě chceme, aby funkční hodnoty nalevo od bodu byly menší a napravo větší než v tomto bodě. Podobně od lokálního maxima čekáme, že alespoň na nějakém jeho okolí budou funkční hodnoty menší, než v tomto bodě.

Definice 13.2. Funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální maximum*, jestliže existuje redukované okolí $P(x_0) \subset D_f$ tak, že platí

$$x \in P(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální minimum*, jestliže existuje redukované okolí $P(x_0) \subset D_f$ tak, že platí

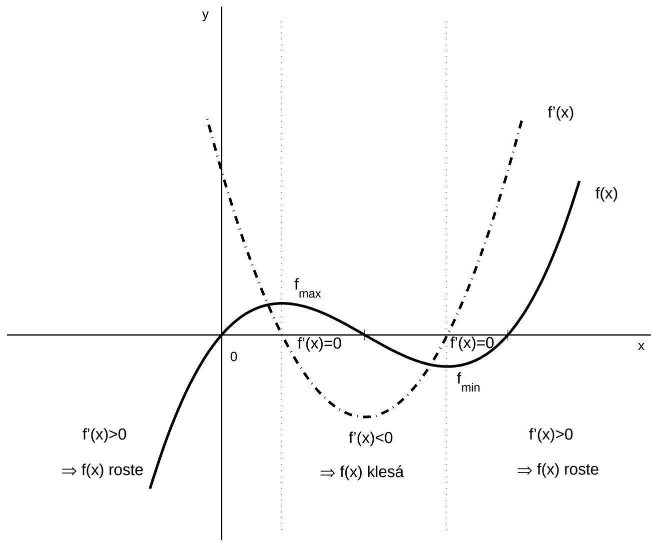
$$x \in P(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Dostáváme se k jedné z nejdůležitějších vět, kdy pomocí derivace rozlišíme body definičního oboru, kde funkce roste klesá nebo může mít extrémy (viz Obrázek 13.1).

Věta 13.1. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je vnitřní bod definičního oboru D_f funkce f. Nechť existuje $f'(c)$ (vlastní nebo nevlastní). Pak platí:

- ☛ je-li $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$, je f v bodě c rostoucí (klesající),
- ☛ má-li f v bodě c lokální extrém, je $f'(c) = 0$.

Poznámka 13.1. Když se vydáme na kopec, tak věta říká, že přesně na vrcholu kopce nejdeme ani nahoru, ani dolů, derivace je tam 0 (stejně jako v údolí). Tato věta však nejde obrátit. Funkce nemusí mít extrémy v bodech, ve kterých je derivace 0, ale může v nich třeba růst. Klasický příklad je funkce $f(x) = x^3$, která v bodě 0 roste (podle Definice 13.1), i když je tam derivace 0.



Obrázek 13.1: Znaménko derivace indikuje růst nebo klesání funkce

Definice 13.3. Nechť f má v bodě $c \in D_f$ derivaci a platí $f'(c) = 0$. Pak se c nazývá *stacionární bod* funkce f.

Z množiny stacionárních bodů budeme vybírat lokální extrémy pomocí druhé derivace.

Věta 13.2. Nechť funkce f má v bodě $c \in D_f$ první derivaci $f'(c) = 0$ a vlastní nebo nevlastní druhou derivaci $f''(c) \neq 0$. Pak f má v bodě c lokální extrém, a to lokální minimum pro $f''(c) > 0$ a lokální maximum pro $f''(c) < 0$.

Hledání extrémů funkce $f(x) = x^4 - x^3$ začneme jejím zderivováním.

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

Ve kterých bodech se derivace rovná 0, zjistíme z rovnice $f'(x) = 0$, tady

$$4x^3 - 3x^2 = 0,$$

$$4x^2\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Rovnost je splněna body $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$.

Vypočteme druhou derivaci funkce f $f''(x) = 12x^2 - 6x$ a zjistíme její hodnoty v nalezených bodech x_1 a x_2 :

$$f''(0) = 0,\ f''(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} > 0.$$

V bodě $x_2 = \frac{3}{4}$ se nachází lokální minimum. Kriterium nám příliš nepomohlo v bodě 0.

V tomto případě se hledá nejnižší derivace, která je v tomto bodě nenulová, pokud je sudá, existuje lokální extrém, v lichém případě funkce v tomto bodě extrém nemá. Když je sudá derivace v tomto bodě kladná, tak se v bodě nachází lokální minimum, když záporná, najdeme v něm maximum.

V našem příkladě bychom spočítali

$$f^{(3)}(x) = 24x - 6,$$

$$f^{(3)}(0) = -6 \neq 0,$$

tedy funkce nemá v 0 extrém.

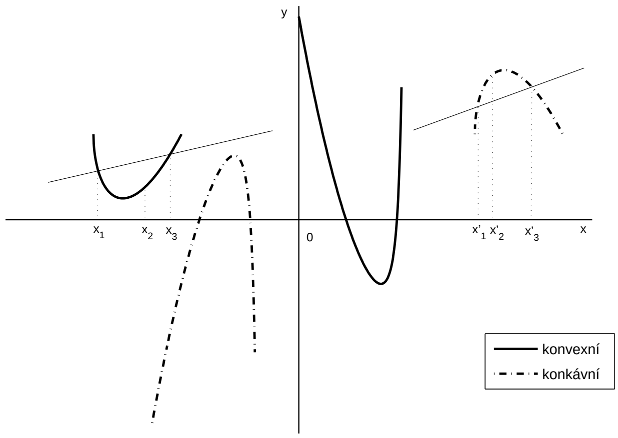
Nyní si v jednorozměrném případě nadefinujeme konvexní a konkávní funkce (Obrázek 13.2).

Definice 13.4. Říkáme, že funkce f je *konvexní (konkávní)* na intervalu $J \subset D_f$, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in J, x_1 < x_2 < x_3$, platí, že bod $P_2 = (x_2,\ f(x_2))$ leží pod (nad) spojnicí bodů $P_1 = (x_1,\ f(x_1)), P_3 = (x_3,\ f(x_3))$ nebo na ní.

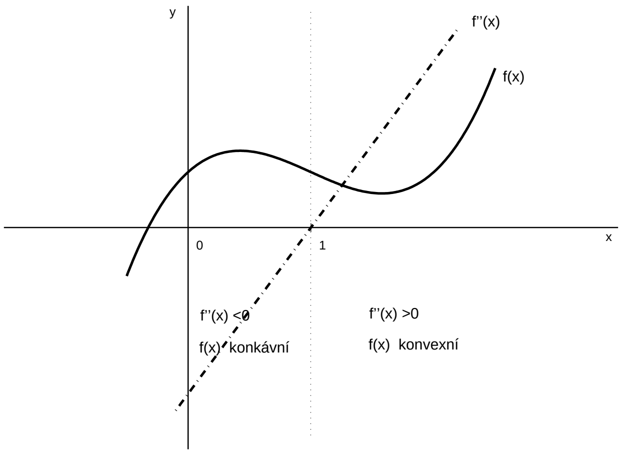
Když se podíváme na grafy konvexních funkcí na intervalu (x_1, x_3), vidíme, že funkce roste víc (nebo alespoň méně klesá) napravo od libovolného bodu $x_2 \in (x_1, x_3)$. Řekneme, že první derivace funkce, která popisuje růst funkce, roste. Tedy že je druhá derivace kladná (Obrázek 13.3).

Věta 13.3. Nechť je funkce f spojitá na intervalu $J \subset D_f$ a má v každém bodě otevřeného intervalu $x \in J^0$ vlastní nebo nevlastní druhou derivaci. Pak platí:

- ☛ f je konvexní na J, právě když $f''(x) \geq 0$,
- ☛ f je konkávní na J, právě když $f''(x) \leq 0$.



Obrázek 13.2: Konvexní a konkávní funkce



Obrázek 13.3: Rozlišení konvexní a konkávní části funkce pomocí znaménka druhé derivace

Konvexnost a konkávnost funkce tedy budeme vyšetřovat pomocí druhé derivace. Bod, ve kterém se spojitá funkce mění z konvexní na konkávní, se nazývá *inflexní bod.*

Definice 13.5. Nechť funkce f má v bodě $c \in D_f$ vlastní derivaci. Říkáme, že funkce f má v bodě c inflexi, jestliže existuje redukované okolí $P(c) \subset D_f$ tak, že

$$\text{pro } x \in P^-(c) \text{ je } f(x) > f(c) + f'(c)(x-c),$$
$$\text{pro } x \in P^+(c) \text{ je } f(x) < f(c) + f'(c)(x-c),$$

nebo naopak. Bod $(c,\ f(c))$ se nazývá inflexním bodem funkce f (nebo grafu G_f).

K hledání inflexních bodů používáme následující větu.

Věta 13.4. Nechť funkce f má v bodě $c \in D_f$ inflexi a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $f''(c)$. Pak $f''(c) = 0$.

Pro nás tato věta znamená hledat řešení rovnice

$$f''(x) = 0.$$

Věta 13.5. Nechť funkce f má v bodě $c \in D_f$ druhou derivaci $f''(c) = 0$ a vlastní nebo nevlastní $f'''(c) \neq 0$. Pak má f v bodě c inflexi.

Podobně jako pro vyšetřování minim a maxim existuje i věta pro případ $f'''(c) = 0$. Nebudeme ji ale „v praxi” příliš využívat.

Ke zpřesnění náčrtu grafu a lepšímu pochopení chování funkce okolo bodů nespojitosti a v nevlastních bodech hledáme asymptoty. Jsou to přímky, ke kterým se graf funkce nekonečně blíží na okolí $\pm\infty$ nebo v bodech nespojitosti. Připomeňme, že jakoukoliv přímku kromě svislé jsme schopni zapsat funkčním předpisem $g(x) = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$. Body svislé přímky nemění svoji $x-$souřadnici, proto $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Definice 13.6. Nechť je funkce f definovaná na nějakém redukovaném okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Přímka $x = c$ se nazývá *vertikální asymptota* funkce f, jestliže má funkce f v bodě c aspoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Vertikální asymptota se někdy nazývá asymptota bez směrnice.

Definice 13.7. Nechť je funkce f definovaná na některém z intervalů $(-\infty, b)$, (a, ∞). Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota funkce* f v bodě ∞ $(-\infty)$, jestliže platí

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx+q)) = 0 \; (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx+q)) = 0).$$

Asymptota v $\pm\infty$ se nazývá *asymptota se směrnicí.*

✎ *Cvičení* 13.1. Najděte lokální extrémy funkcí:

1. $f(x) = 2 + x - x^2$,
2. $f(x) = x^3$,
3. $f(x) = -x^4$,
4. $g(x) = xe^x$,
5. $j(t) = \sin t$.

✓ *Řešení.* maximum v $\frac{1}{2}$✓nemá lokální extrémy ✓maximum v 0✓minimum v -1✓maxima v $\{x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, maxima v $\{x \in \mathbb{R}, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

✎ *Cvičení* 13.2. Najděte lokální extrémy funkcí:

$$f(x) = (2x+3)^2,\ f(x) = 3x - x^3,\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2},\ f(x) = x + \frac{1}{x},$$

$$f(x) = x + \sin x,\ f(x) = xe^{-x},\ f(x) = \frac{2x-3}{4x-5},\ f(x) = \sqrt{2x - x^2}.$$

✓ *Řešení.* minimum v $-\frac{3}{2}$✓minimum v -1, maximum v 1✓minimum v -1, maximum v 1✓maximum v -1, minimum v 1✓nemá extrém✓maximum v 1✓nemá extrém✓maximum v 1

Všimněme si, že hodnoty elementární funkce nemění znaménko bod od bodu, ale jsou kladné nebo záporné na celých intervalech. Existují jen dvě možnosti, jak se graf funkce f dostává přes vodorovnou osu:

- Graf prochází osou x, tedy pro nějaký bod $x_0 \in D_f$ platí, že $f(x_0) = 0$,
- Funkce je nespojitá a její graf „přeskočí" v nespojitosti vodorovnou osu.

Pokud najdeme všechny nulové body a body nespojitosti funkce, rozdělí nám tyto definiční obor D_f na intervaly, kde mají funkční hodnoty stejné znaménko (nemají jak ho změnit). Pak už stačí jen zjistit znaménko funkčních hodnot na jednotlivých intervalech a spočítat funkční hodnotu v kterémkoliv bodu daného intervalu.

U elementárních funkcí vznikají body nespojitosti hlavně tam, kde by se dělilo 0. Vyšetříme průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1},$$

která má nespojitost v bodě $x_1 = 1$. Protože definiční obor $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ není souměrný okolo 0, nemůže být funkce lichá ani sudá.

Dále budeme hledat nulové body funkce pomocí rovnice

$$f(x) = 0.$$

V našem případě řeší rovnici

$$\frac{x^2}{x-1} = 0$$

číslo $x_2 = 0$. Nalezená čísla x_1 a x_2 rozdělí definiční obor D_f na tři intervaly:

$$I_1 = (-\infty, 0\rangle,\ I_2 = \langle 0, 1),\ I_3 = (1, \infty).$$

Dosazením čísel z těchto intervalů zjistíme, na kterých z nich jsou funkční hodnoty kladné a na kterých záporné:

$$f(-1) = \frac{-1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2},\ f(2) = 4,$$

kde $-1 \in I_1$, $\frac{1}{2} \in I_2$, $2 \in I_3$. Odtud plyne, že funkce je záporná na $I_1 \cup I_2 = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1) = (-\infty, 1)$ a kladná na $I_3 = (1, \infty)$.

Nyní obrátíme svou pozornost k růstu funkce. Pokud $f'(x) > 0$, funkce v x roste, pokud $f'(x) < 0$, funkce v x klesá. Funkce $f'(x)$ je pro elementární funkce také kladná (nebo záporná) na určitých intervalech (a proto i funkce f na intervalech jen roste nebo jen klesá). Stejným postupem najdeme body, kde se může $f'(x)$ stát z kladné zápornou nebo naopak. Tyto body nám ohraničí intervaly se stejnými znaménky funkčních hodnot $f'(x)$. Ta nám určí, jestli původní funkce na intervalu roste nebo klesá.

Vrátíme se k příkladu,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

(Jeden tvar funkce se hodí pro řešení rovnice a druhý pro derivování.)
Najdeme nulové body $f'(x)$,

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0,$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Pro kreslení grafu se nám ještě bude hodit funkční hodnota $f(2) = 4$, tedy funkce prochází bodem $[2, 4]$. Dále víme, že $f(0) = 0$, protože jde o nulový bod. Bod nespojitosti bude zase $x_3 = 1$. Tyto tři body nám rozdělí $D_{f'}$, definiční obor f', na čtyři intervaly

$$I_1 = (-\infty, 0\rangle,\ I_2 = \langle 0, 1),\ I_3 = (1, 2\rangle,\ I_4 = \langle 2, \infty).$$

Dosazením bodů z těchto intervalů do f' dostaneme f' je kladná, a proto f roste na $I_1 \cup I_4 = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$. f' je záporná, a proto f klesá na $I_2 \cup I_3 = \langle 0, 1) \cup (1, 2\rangle$. Funkce před bodem 0 roste a za ním klesá, nachází se v něm tedy maximum, podobně v bodě 2 je minimum.

Ani při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti funkce f nebude postup jiný. Najdeme $f''(x)$,

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Její definiční obor rozdělíme jejími nulovými body a body nespojitosti na intervaly, kde bude f jen konvexní nebo jen konkávní.

Nulové body tentokrát nenajdeme, protože

$$\frac{2}{(x-1)^3} = 0$$

nemá řešení. Bod nespojitosti $x_1 = 1$ nám rozdělí definiční obor f'' na dva intervaly

$$I_1 = (-\infty, 1),\ I_2 = (1, \infty).$$

Protože $f''(0) = -2,\ f''(2) = 2$, bude funkce f konvexní na $I_2 = (1, \infty)$ a konkávní na $I_1 = (-\infty, 1)$. Tedy stejným postupem získáváme intervaly, na kterých je funkce jen kladná, nebo jen záporná, jen rostoucí, nebo jen klesající, jen konvexní, nebo jen konkávní.

Dále můžeme rozdělit D_f na intervaly, které budou průniky nalezených intervalů takové, že na nich bude funkce například jen kladná, rostoucí a konkávní. Tak budeme pro každý interval vědět, jaký tvar křivky grafu máme kreslit. Ještě však budeme potřebovat vědět, v jaké funkční hodnotě krajního bodu intervalu máme začít kreslit a v jaké skončit. Snadno najdeme funkční hodnoty v bodech definičního oboru funkce. Okolo bodů nespojitosti a v bodech $\pm\infty$ uplatníme limity. Pokud budou limity rovny $\pm\infty$, budeme ještě hledat asymptoty. Ty naznačí, jestli se graf funkce přimyká k přímce,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty.$$

Spočítáme asymptoty se směrnicí

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=1,$$

$$q=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=1.$$

Odtud plyne

$$a_1(x)=x+1.$$

Stejně najdeme i asymptotu v $-\infty$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=1,$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=1.$$

Odtud dostaneme

$$a_2(x)=x+1.$$

V bodech nespojitosti vyšetřujeme vertikální asymptoty. Limita

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x-1}$$

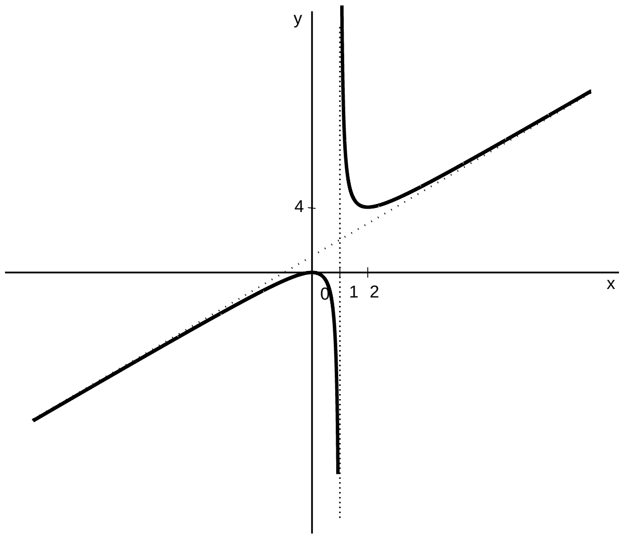
sice neexistuje, ale najdeme jednostranné limity

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty.$$

To znamená, že graf funkce se bude přimykat k vertikální asymptotě $x = 1$.

Kupodivu nebývá nejobtížnější spočítat všechny potřebné limity a derivace, ale nakreslit pak z výsledků graf. Jeho konstrukce samozřejmě začíná nakreslením os x a y. Dále zakreslíme asymptoty a význačné body, kterými funkce prochází, nulové body, v našem případě $[0, 0]$, stacionární body, $[0, 0]$, $[2, 4]$, a případné inflexní body.



Obrázek 13.4: Graf vyšetřované funkce

Hledali jsme intervaly, na kterých je funkce kladná nebo záporná, rostoucí nebo klesající a konkávní nebo konvexní. Vyplatí se rozdělit definiční obor funkce na intervaly, kde se funkce chová stejně, například je konvexní, rostoucí a záporná. Naše funkce je záporná, rostoucí a konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$, záporná, klesající a konkávní na $(0, 1)$, kladná, klesající a konvexní na $(1, 2)$ a kladná, rostoucí a konvexní na $(2, \infty)$. Tyto intervaly najdeme jako průniky nalezených intervalů pro znaménko, růst a konvexitu vyšetřované funkce.

Nyní už víme, že graf funkce vyráží od $-\infty$ podél asymptoty $a_1(x) = x + 1$, je záporný, roste a je konkávní, dokud nedorazí do bodu $[0, 0]$. Odtud klesá po konkávní dráze okolo asymptoty $x = 1$ k $-\infty$. Naopak pro x těsně větší než 1 padá funkce z velkých hodnot po konvexní dráze do bodu $[2, 4]$. Následuje konvexní růst vstříc nekonečnu a přimknutí k asymptotě $a_2(x) = x + 1$. Výsledný graf najdeme na Obrázku 13.4.

Poznámka 13.2. V příkladu jsme však zdaleka nevyčerpali všechny možnosti, které mohou nastat pro případné asymptoty se směrnicí. Asymptotu v $\pm\infty$ má smysl počítat, jen když

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

V tomto případě se může graf funkce blížit k přímce se směrnicí $k \neq 0$. Všimněme si, že

$$\lim_{x\to\infty} kx+q = \infty \Leftrightarrow k > 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} kx+q = -\infty \Leftrightarrow k < 0.$$

Pokud pro limitu platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R},$$

asymptota vždy existuje a má předpis $a(x) = c$. Směrnice je v tomto případě nulová $(k = 0)$.

Pokud bude v bodě nespojitosti c limita zprava (zleva) rovna $\pm\infty$, bude se graf funkce zprava (zleva) přimykat k vertikální asymptotě $x = c$.

✎ *Cvičení* 13.3. Najděte intervaly, na kterých funkce rostou a klesají:

$$f(x) = 2+x-x^2,\ f(x) = 3x-x^3,\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$
$$f(x) = x+\sin x,\ f(x) = xe^{-x},\ f(x) = \frac{2x-3}{4x-5}.$$

✔ *Řešení.* funkce na $(-\infty, \frac{1}{2}\rangle$ roste, na $\langle\frac{1}{2}, \infty)$ klesá✔funkce na $(-\infty, -1\rangle$ klesá, na $\langle -1, 1\rangle$ roste, na $\langle 1, \infty)$ klesá✔funkce na $(-\infty, -1\rangle$ klesá, na $\langle -1, 1\rangle$ roste, na $\langle 1, \infty)$ klesá✔funkce roste na $\mathbb{R}$✔funkce na $(-\infty, 1\rangle$ roste, na $\langle 1, \infty)$ klesá✔na $(-\infty, 1.25)$ roste, na $(1.25, \infty)$ roste

✎ *Cvičení* 13.4. Najděte intervaly, na kterých jsou funkce konvexní a konkávní:

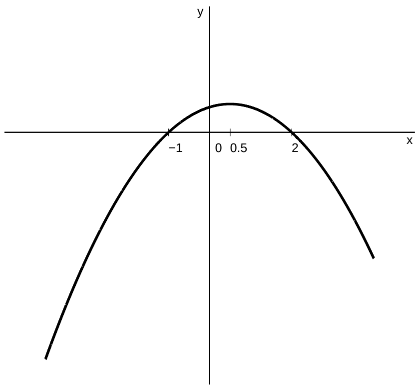
$$f(x) = 2+x-x^2,\ f(x) = 3x^2-x^3,\ f(x) = e^{-x^2}$$
$$f(x) = x+\sin x,\ f(x) = xe^{-x},\ f(x) = \frac{2x-3}{4x-5},\ f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

✔ *Řešení.* konkávní na $\mathbb{R}$✔na $(-\infty, 1\rangle$ konvexní, na $\langle 1, \infty)$ konkávní✔na $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ konvexní, na $\langle 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ konkávní, na $\langle\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ konvexní✔na $\langle 2k\pi, 2k\pi+\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ konkávní, na $\langle 2k\pi-\pi, 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ konvexní✔na $(-\infty, 2\rangle$ konkávní $\langle 2, \infty)$ konvexní✔na $(-\infty, 1,25)$ konvexní, na $(1,25, \infty)$ konkávní✔konvexní

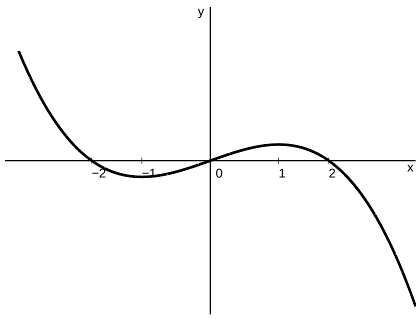
✎ *Cvičení* 13.5. Vyšetřete průběh funkcí:

$$f(x) = 2+x-x^2,\ f(x) = 3x-x^3,\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2},\ f(x) = x+\frac{1}{x},$$
$$f(x) = x^2+\frac{1}{x^2},\ f(x) = e^{-x^2},\ f(x) = \frac{2x-3}{4x-5},\ f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

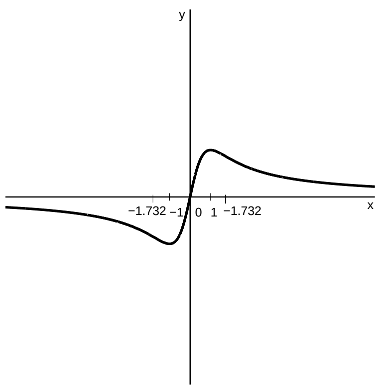
✓ *Řešení.*



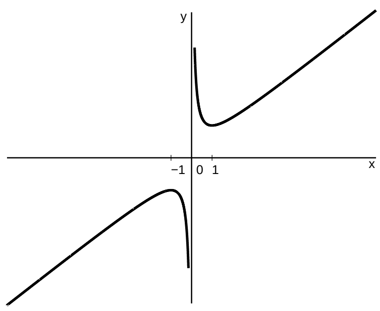
Graf funkce $f(x) = 2 + x - x^2$



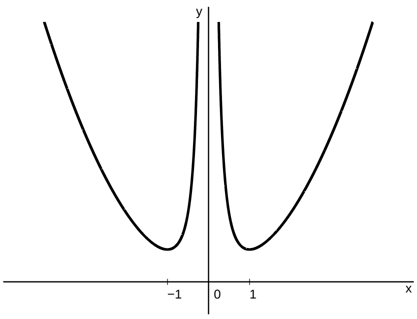
Graf funkce $f(x) = 3x - x^3$



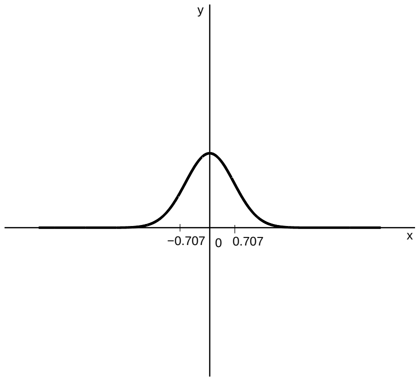
Graf funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$



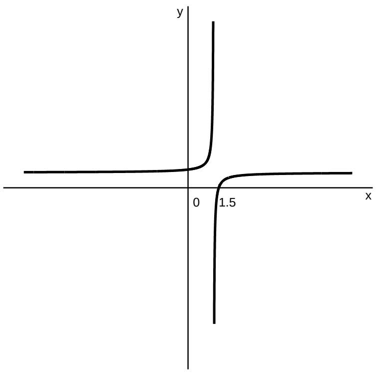
Graf funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$



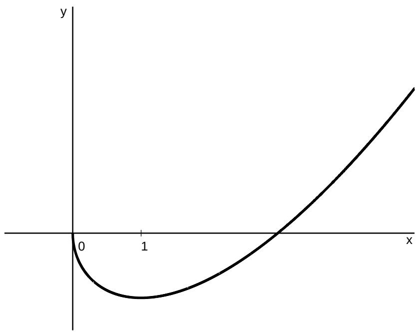
Graf funkce $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$



Graf funkce $f(x) = e^{-x^2}$



Graf funkce $f(x) = \frac{2x-3}{4x-5}$



Graf funkce $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

Rejstřík

Literatura

[1] P. Čermák a P. Červinková, *Odmaturuj z matematiky 1*, Didaktis, 3. vydání, 2004.

[2] J. Kojecká a T. Kojecký, *Matematická analýza pro I. semestr,* Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2. vydání, 2001.

[3] J. Polák, *Přehled středoškolské matematiky,* Prometheus, 9. vydání, 2008.

Sbírky úloh z matematiky:

[4] I. Bušek, *Rešené maturitní úlohy z matematiky,* 3.vydání, Prometheus, 1999.

[5] J. Kubát, *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Victoria Publishing, 1993.

[6] J. Petáková, *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy,* Prometheus, 1998.

[7] J. Polák, *Středoškolská matematika v úlohách I.,* Prometheus, 2. vydání, 1996.

[8] M. Rosická, L. Eliášová, *Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE*, 2. vydání, Vysoká škola ekonomická, 2000.

Mgr. Miroslav Rypka, Ph.D.

Mgr. Pavel Tuček, Ph.D.

Matematika pro Geocomputation

Výkonný redaktor: Prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.

Odpovědná redaktorka: Mgr. Jana Kreiselová

Technická redakce: Mgr. Miroslav Rypka Ph.D.

Určeno pro výuku, výzkum

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci

Křížkovského 8, 771 47 Olomouc

www.upol.cz/vup

vup@upol.cz

Olomouc 2013

1. vydání

VUP 2013/179

Edice - Skripta

ISBN 978-80-244-3468-1

http://www.geocomputation.upol.cz/Matematika_pro_Geocomputation.pdf

Tato skripta vydává Katedra geoinformatiky jako svou XXXIX. publikaci.